

Tartalomjegyzék

1. Alsó és felső korlátok rendszerek működési idejének várható értékére	3
1.1. A binomiális momentumprobléma	9
1.2. Alkalmazás rendszerek működési ideje alsó és felső korlátjának meghatározására	18
1.3. A feltéeltér felbontása poliedrikus kúpokra	23
1.4. Vasút közlekedési alkalmazás	26
1.5. Városi közlekedési alkalmazás	35
2. Csoportos életbiztosítás	44
2.1. Az élettartamok együttes valószínűségeloszlásának jelentősége az életbiztosítási feladatokban	48
2.2. Alsó és felső korlátok az aktuárius jelenértékre vonatkozólag	51
2.3. Az $m+1=3$ esetre vonatkozó formulák	59
3. Együttes eloszlás konstrukciója adott egydimenziós peremeloszlások esetén	61
4. Mellékletek	83

Bevezetés

Az elmúlt 10 év során Prékopa András és munkatársai, továbbá Samuelson és Studen kidolgozta az un. diszkrét momentum technikát. Ennek az a lényege, hogy ha ismerjük egy ξ valószínűségi változó bizonyos $E(\xi), \dots, E(\xi^m)$ hatványmomentumait, vagy $E[\binom{\xi}{1}], \dots, E[\binom{\xi}{m}]$ binomiális momentumait, akkor ezekből következtethetünk a $P(\xi \geq r)$ valószínűségre, illetve adunk ezekre jól közelítő alsó és felső korlátokat. Esetünkben a ξ valószínűségi változó diszkrét, véges sok lehetséges értéke van. Példaként említhetők a távközlési hálózatok, ahol vagy két fogyasztó közötti összeköttetés lehetőségének, vagy az egész hálózat összefüggőségének a valószínűségét akarjuk közelítőleg meghatározni. A két fogyasztóval kapcsolatos probléma esetében a fogyasztókat összekötő útvonalak mindegyike egy-egy esemény, azt jelenti, hogy az útvonal működik -e, vagy sem, a ξ valószínűségi változó pedig azt jelenti, hogy hány esemény következik be. Becsülni akarjuk a $P(\xi \geq 1)$ valószínűséget, vagyis annak a valószínűségét, hogy legalább egy útvonal működik. Ez $E[\binom{\xi}{k}]$ binomiális momentum, mint ismeretes, az esemény k -asok valószínűségének összegével egyenlő. A valószínűség alsó és felső korlátjainak meghatározására lineáris programozási feladatok és az ezeket megoldó un. duál módszerek szolgálnak.

A diszkrét momentum technika alkalmazása időben lejátszódó feladatok megoldására még nincsen megfelelő módon kiaknázva. Ha választ keresünk olyan kérdésekre, mint pl: mennyi az átlagosan eltelt idő a rendszer első meghibásodásáig, akkor a minden egyes időpontra felírt diszkrét momentum probléma által szolgáltatott alsó és felső becslések nem elegendőek a válaszadásra.

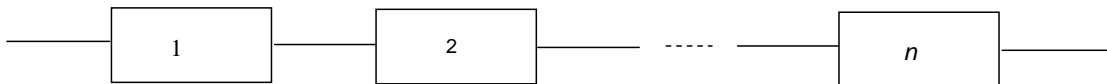
A disszertációban ilyen jellegű kérdések megoldásával foglalkozunk. A módszertan a valószínűségelmélet, a lineáris programozás és a matematikai analízis ötvözetén alapszik. Részletesen foglalkozunk a biztosítási matematikai problémák körében ismeretes "együttes élettartam problémák" közelítő megoldásával. Az együttes életbiztosítást tekintve először optimális becsléseket adunk arra vonatkozólag, hogy adott időpontig adott számú egyed életben maradjon, majd a lineáris programozás elméletét a többváltozós valószínűségi sűrűségfüggvények integráljait felhasználva, következtetünk a biztosítási

politikával kapcsolatos un. aktuárius jelenértékre.

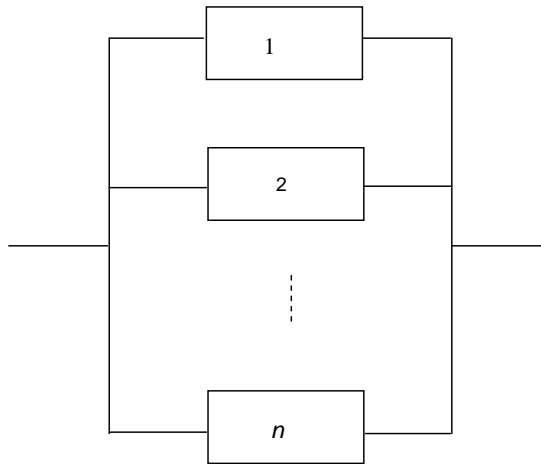
Az eredményeket hazai halandósági táblákra támaszkodva számszerűleg illusztráljuk.

1. Alsó és felső korlátok rendszerek működési idejének várható értékére

Az ún. megbízhatósági rendszerek legegyszerűbb esetei a soros illetve párhuzamos kapcsolási rendszerek (lásd 1, 2. ábrák.)



1. ábra. Soros kapcsolási rendszer



2. ábra. Párhuzamos kapcsolási rendszer

A rendszerben szereplő 1-től n -ig számozott összetevőket komponenseknek nevezzük. A soros rendszer akkor és csak akkor működik, ha mindegyik komponense működik. A párhuzamos rendszer akkor és csak akkor működik, ha legalább egy komponense működik. Ha egyszerűség kedvéért feltételezzük, hogy az egyes komponensek egymástól függetlenül működnek, vagy nem működnek, és p_i jelöli annak a valószínűségét, hogy az i -edik komponens működik, akkor a soros, illetve párhuzamos rendszerek működési

valószínűségét az alábbi képletek szolgáltatják:

$$r = p_1 p_2 \dots p_n \quad (1.1)$$

$$r = 1 - (1 - p_1)(1 - p_2) \dots (1 - p_n). \quad (1.2)$$

A gyakorlati problémákban az egyes komponensekkel kapcsolatban beszélhetünk azok élettartamáról. Ezekről feltesszük, hogy valószínűségi változók. Egyszerűség kedvéért tegyük fel azt is, hogy függetlenek. Ha az i -edik komponens élettartamát X_i jelöli és $F_i(t)$ ennek eloszlásfüggvénye,

$$F_i(t) = P(X_i \leq t), \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.3)$$

akkor a rendszer t időpontbeli működési valószínűségét az (1.1) illetve (1.2) képletek szolgáltatják a

$$p_i = 1 - F_i(t), \quad i = 1, \dots, n \quad (1.4)$$

helyettesítéssel. A továbbiakban a rendszer működési valószínűségét a rendszer megbízhatóságának nevezzük. A gyakorlatban nemcsak a rendszer adott időpontbeli megbízhatóságának a valószínűségét akarjuk meghatározni, hanem más egyéb jellemző adatokat is. Ezek körében egyik legfontosabb a meghibásodásig eltelt idő várható értéke. Soros rendszer esetében a meghibásodásig eltelt időt az

$$X = \text{Min}(X_1, X_2, \dots, X_n), \quad (1.5)$$

párhuzamos rendszer esetében az

$$Y = \text{Max}(X_1, X_2, \dots, X_n), \quad (1.6)$$

valószínűségi változó adja meg.

Ezek várható értékét elvben meghatározhatjuk az alábbi módon. Ismeretes, hogy ha egy Z nemnegatív valószínűségi változó eloszlásfüggvénye $G(z)$, akkor

$$E(Z) = \int_0^{\infty} [1 - G(z)] dz. \quad (1.7)$$

Első lépésben tehát az (1.5) és (1.6) képletekkel adott X, Y valószínűségi változók eloszlásfüggvényét kell meghatározni. Ez könnyen megtehető az $F_i(t)$, $i = 1, \dots, n$ eloszlásfüggvények ismeretében. Valóban, soros rendszer esetében azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
 F(t) &= P(X \leq t) \\
 &= P(\min(X_1, \dots, X_n) \leq t) \\
 &= 1 - P(\min(X_1, \dots, X_n) > t) \\
 &= 1 - P(X_1 > t, \dots, X_n > t) \\
 &= 1 - P(X_1 > t) \cdots P(X_n > t) \\
 &= 1 - (1 - F_1(t)) \cdots (1 - F_n(t)).
 \end{aligned} \tag{1.8}$$

Párhuzamos rendszer esetében viszont az adódik, hogy

$$\begin{aligned}
 G(t) &= P(Y \leq t) = P(\max(X_1, \dots, X_n) \leq t) \\
 &= P(X_1 \leq t, \dots, X_n \leq t) \\
 &= P(X_1 \leq t), \dots, P(X_n \leq t) \\
 &= F_1(t) \cdots F_n(t).
 \end{aligned} \tag{1.9}$$

A fentiek szerint a soros rendszer esetében a meghibásodásig eltelt idő várható értéke

$$\int_0^{\infty} [1 - F(t)] dt, \tag{1.10}$$

párhuzamos rendszer esetében pedig a várható érték

$$\int_0^{\infty} [1 - G(t)] dt. \tag{1.11}$$

Bonyolultabb esettel állunk szemben akkor, ha az X_1, \dots, X_n valószínűségi változók sztochasztikusan összefüggők.

A továbbiakban gyakran fel fogjuk használni az ún. szita formulát, mely tetszőleges A_1, \dots, A_n eseményekre érvényes:

$$P(A_1 \cup \dots \cup A_n) = S_1 - S_2 + S_3 + \dots + (-1)^{n-1} S_n, \quad (1.12)$$

ahol

$$S_k = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}), \quad k = 1, \dots, n. \quad (1.13)$$

E formulát gyakran Poincaré formulának nevezik, arra való tekintettel hogy ezt Poincaré (1896) dolgozatában közölte. A szakirodalom tanúsága szerint azonban a formulát, sőt ennek néhány általánosítását is C.Jordan (1867) dolgozata már tartalmazza. A szita formula módszerének történetét és alkalmazását illetően ld. Takács (1967) cikkét és Prékopa (1995) könyvét. Az (1.13) képlettel adott mennyiségeket binomiális momentumoknak nevezzük. Az elnevezést az alábbi tétel indokolja, melynek bizonyítása megtalálható az említett cikkben és könyvben.

1.1. Tétel: *Jelölje V az A_1, \dots, A_n események közül azoknak a számát, amelyek bekövetkeznek. Nyilvánvaló, hogy a V valószínűségi változó lehetséges értékei $0, 1, \dots, n$. Azt állítjuk, hogy fennáll az alábbi egyenlőség*

$$E \left[\binom{V}{k} \right] = S_k, \quad k = 0, 1, \dots, n. \quad (1.14)$$

Alkalmazzuk az (1.13) képletet az $X_i \leq (t), i = 1, \dots, n$ eseményekre, figyelembe véve, hogy

$$F(t) = P(X \leq t) = P(\min(X_1, \dots, X_n) \leq t) = P(A_1 \cup \dots \cup A_n). \quad (1.15)$$

Mielőtt a formulát felírnánk, bevezetjük az alábbi jelöléseket:

$$F_{i_1, \dots, i_k}(t) = P(X_{i_1} \leq t, \dots, X_{i_k} \leq t), \quad 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n \quad (1.16)$$

$$S_k(t) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} F_{i_1 \dots i_k}(t), \quad k = 1, \dots, n. \quad (1.17)$$

E jelölésekkel érvényes az alábbi egyenlőség:

$$F(t) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} S_k(t), \quad (1.18)$$

továbbá, az (1.8) formula szerint az alábbi egyenlőség is:

$$E(X) = \int_0^{\infty} [1 - F(t)] dt = \int_0^{\infty} \left[1 - \sum_{k=0}^n (-1)^k S_k(t) \right] dt. \quad (1.19)$$

Az (1.16), (1.17) képlethez hasonlóan értelmezzük az

$$\bar{F}_{i_1, \dots, i_k}(t) = P(X_{i_1} > t_1, \dots, X_{i_k} > t), 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n \quad (1.20)$$

$$\bar{S}_k(t) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \bar{F}_{i_1, \dots, i_k}(t), k = 1, \dots, n. \quad (1.21)$$

függvényeket. Ezek segítségével felírhatjuk a párhuzamos rendszer működési idejének várható értékét. Fennáll az, hogy

$$\begin{aligned} 1 - G(t) &= P(Y > t) = P(\max(X_1, \dots, X_n) > t) \\ &= P(\bar{A}_1 \cup \dots \cup \bar{A}_n) \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} P(\bar{A}_{i_1} \cap \dots \cap \bar{A}_{i_k}) \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \bar{S}_k(t). \end{aligned} \quad (1.22)$$

Innen pedig azt kapjuk, hogy

$$E(Y) = \int_0^{\infty} [1 - G(t)] dt = \int_0^{\infty} \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \bar{S}_k(t) dt. \quad (1.23)$$

Megjegyezzük még, hogy ha az (1.12) és (1.13) formulában szereplő mennyiségeken (binomiális momentumokon) kívül bevezetjük még az

$$\bar{S}_k = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} P(\bar{A}_{i_1} \cap \dots \cap \bar{A}_{i_k}) \quad k = 1, \dots, n \quad (1.24)$$

mennyiségeket, akkor érvényes az alábbi összefüggés

$$\bar{S}_k = \binom{n}{k} + \sum_{i=1}^k \binom{n-i}{k-i} (-1)^i S_i, \quad k = 1, \dots, n. \quad (1.25)$$

Ugyanez nyilván érvényben marad akkor is, ha S_k helyébe \bar{S}_k szimbólumot és \bar{S}_k helyébe az S_k szimbólumot helyettesítjük. Ugyanis az (1.25) formulát alkalmazhatjuk az $\bar{A}_1, \dots, \bar{A}_n$ eseményekre is.

Az (1.19) és az (1.23) képleteknek elsősorban elvi, mintsem gyakorlati jelentőségük van. Ugyanis, ha n nagy szám, akkor, az $S_1(t), \dots, S_n(t)$ és az $\bar{S}_1(t), \dots, \bar{S}_n(t)$ binomiális momentumok közül csupán az alacsony indexűek számíthatók ki. Fontos tehát, hogy a $E(X)$ és $E(Y)$ várható értékekre a gyakorlatban használható alsó és felső korlátokat dolgozzunk ki, melyekben az előbb említett binomiális momentumok közül csupán az alacsony indexűek fordulnak elő.

1.1. A binomiális momentumprobléma

Jelölje V az A_1, A_2, \dots, A_n események közül bekövetkező események számát. Legyenek A_1, \dots, A_n tetszőleges események egy tetszőleges eseménytérben, és legyenek S_k, \bar{S}_k , $k = 1, \dots, n$ az (1.13) és az (1.24) képletekkel adott mennyiségek. Vezessük még be a

$$v_i = P(V = i), \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (1.26)$$

jelölést. Az 1.1.tétel szerint fennállnak az alábbi egyenlőségek

(ahol $S_0 = 1$):

$$\sum_{i=0}^n \binom{i}{k} v_i = S_k, \quad k = 0, 1, \dots, n. \quad (1.27)$$

Az (1.27) egyenlőségeket a v_0, v_1, \dots, v_n számokra nézve egyenletrendszernek tekinthetjük, melynek mátrixa az alábbi;

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ & 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ & & 1 & \binom{3}{2} & \dots & \binom{n}{2} \\ & & & 1 & \dots & \binom{n}{3} \\ & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.28)$$

ahol a fődiagonális alatt zérók állnak. Az (1.28) mátrix nem szinguláris, inverze (ld. pl. Riordan 1968) az alábbi:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & \dots & (-1)^{n+1} \\ & 1 & -2 & 3 & \dots & (-1)^n n \\ & & 1 & -\binom{3}{2} & \dots & (-1)^{n-1} \binom{n}{2} \\ & & & 1 & \dots & (-1)^{n-2} \binom{n}{3} \\ & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.29)$$

Az (1.27) egyenletrendszerből tehát v_0, v_1, \dots, v_n meghatározhatók, eredményül azt kapjuk, hogy

$$v_i = \sum_{k=0}^n (-1)^{k-1} \binom{k}{i} S_k, \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (1.30)$$

Nyilvánvaló, hogy fennáll a

$$P(V \geq 1) = v_1 + \dots + v_n \quad (1.31)$$

egyenlőség.

Tegyük most fel, hogy az S_k , $k = 0, 1, \dots, n$ binomiális momentumok közül csupán az S_k , $k \leq m$ értékek ismertek. Ekkor az (1.27) egyenlőségrendszerből csak az alábbiakat megtartva:

$$\sum_{i=0}^n \binom{i}{k} v_i = S_k, \quad k = 0, 1, \dots, m,$$

$$v_i \geq 0, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

a nemnegativitási feltételeket előírva, az (1.31) egyenlőség jobb oldalán álló összeget pedig minimalizálva, illetve maximalizálva, két lineáris programozási feladatot kapunk.

Ezek optimum értékei a $P(V \geq 1)$ valószínűségre vonatkozólag alsó illetve felső korlátokat szolgáltatnak. Tekintsük tehát az alábbi lineáris programozási feladatokat:

$$\min(\max) \sum_{i=1}^n v_i$$

feltéve, hogy

$$\sum_{i=1}^n \binom{i}{k} v_i = S_k, \quad k = 0, 1, \dots, m$$

(1.32)

$$v_i \geq 0, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Az (1.32) feladatokban v_0, v_1, \dots, v_n döntési változók. Ha v_{\min} , illetve v_{\max} jelentik ezen feladatok optimum értékeit, akkor tehát fennáll az, hogy

$$v_{\min} \leq P(V \geq 1) \leq v_{\max}. \quad (1.33)$$

Ezen túlmenően azt is állíthatjuk, és ez a fenti megfogalmazásból nyilvánvaló, hogy az (1.33) alsó és felső korlátok élesek, vagyis csupán az $S_k, k \leq m$ binomiális momentumokra támaszkodva nem adhatók jobb korlátok.

Az (1.32) feladatok mellett megfogalmazzunk még egy másik feladatpárt, mely az (1.32)-től abban különbözik, hogy nem szerepel bennük S_0 sora és v_0 oszlopa. Az új feladatpár tehát az alábbi:

$$\min(\max) \sum_{i=1}^n v_i$$

feltéve, hogy

$$\sum_{i=1}^n \binom{i}{k} v_i = S_k, \quad k = 1, \dots, m,$$

(1.34)

$$v_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Jelöljék V_{\min} és V_{\max} az (1.34) feladatok optimum értékét. Könnyű belátni hogy

az (1.34) minimum feladat optimum értéke megegyezik az (1.32) minimum feladat optimum értékével, vagyis $V_{\min} = v_{\min}$. Ugyanis az (1.34) feladat megengedett megoldásai között v_1, \dots, v_n valódi értékei is helyet foglalnak és így az optimum érték nem nagyobb 1-nél.

Másfelől az (1.34) feladat minden olyan megengedett megoldása, melyre $v_1 + \dots + v_n \leq 1$, kölcsönösen és egyértelműen megfeleltethető az (1.32) feladat $v_0 = 1 - v_1 - \dots - v_n$, v_1, \dots, v_n megengedett megoldásának és a megfelelő megengedett megoldásokon a célfüggvényértékek egyenlők.

A maximum feladatok optimum értékei nem feltétlenül egyenlők. Az (1.34) maximumfeladat optimumértéke ugyanis lehet 1-nél nagyobb is. Fennáll azonban a

$$v_{\max} = \min(V_{\max}, 1) \quad (1.35)$$

egyenlőség. Ugyanis az (1.32) feladatot oly módon is megfogalmazhatjuk, hogy azt a feltételt, melyben v_0 szerepel, a $v_1 + \dots + v_n \leq 1$ feltétellel pótoljuk, és elhagyjuk a $v_0 \geq 0$ nemnegatívítási követelményt is. Ekkor azonban a feltételek között helyet foglal egy olyan is, mely a célfüggvényre vonatkozólag ír elő felső korlátot (ti. azt, hogy $v_1 + \dots + v_n \leq 1$). Ilyen esetben a célfüggvényre vonatkozó korlátozó egyenlőtlenség elhagyható, viszont az így kapott optimum érték és a célfüggvény korlátjának a maximuma szolgáltatja a kívánt optimum értéket, esetünkben az (1.32) maximum feladat optimum értékét. Ezzel az (1.35) egyenlőséget beláttuk. Érdeemes még felírni az (1.34) feladatok duálisait. Az (1.34) minimum feladat duálisa az alábbi:

$$Max \sum_{k=1}^m S_k x_k$$

$$\text{feltéve, hogy} \quad (1.36)$$

$$\sum_{k=1}^m \binom{i}{k} x_k \leq 1, \quad i = 1, \dots, n.$$

Az (1.34) maximum feladat duálisa pedig következő

$$\text{Min} \sum_{k=1}^m S_k y_k$$

feltéve, hogy (1.37)

$$\sum_{k=1}^m \binom{i}{k} y_k \geq 1, \quad i = 1, \dots, n.$$

A binomiális momentumproblémát Prékopa (1988) fogalmazta meg és vizsgálta legfontosabb tulajdonságait. E dolgozatban megtalálható a duális feladatok interpretációja is. Az (1.36) és az (1.37) feladatokban a változók nincsenek nemnegatívítási feltétellel korlátozva. Tekintsük az általános lineáris programozási feladatot:

$$\min(\max) \mathbf{c}^T \mathbf{x}$$

feltéve hogy (1.38)

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0},$$

ahol A $m \times n$ -es mátrix, \mathbf{c} , \mathbf{x} n -komponensű, \mathbf{b} m -komponensű vektor, $m \leq n$. Feltesszük, hogy A rangja m -mel egyenlő. Bevezetjük még az

$$\begin{aligned} A &= (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n), & \mathbf{b} &= (b_1, \dots, b_m)^T \\ \mathbf{x} &= (x_1, \dots, x_n)^T, & \mathbf{c} &= (c_1, \dots, c_n)^T \end{aligned}$$

jelöléseket.

1.1. Definíció: Ha az $\{\mathbf{a}_i, i \in I\}$, $|I| = m$ vektorok lineárisan függetlenek, akkor azt mondjuk, hogy ezek az $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}$ vektorok egy bázisát alkotják. A bázis elnevezést a

$$B = (\mathbf{a}_i, i \in I)$$

mátrixra is alkalmazzuk, ahol az oszlopvektorokat a növekvő indexek sorrendjében helyezzük el.

1.2. Definíció: A B bázist megengedettnek nevezzük, ha a $\mathbf{B}\mathbf{x}_B = \mathbf{b}$ egyenlet \mathbf{x}_B megoldására teljesül az $\mathbf{x}_B \geq 0$ egyenlőtlenség. Ha \mathbf{x}_B minden komponense pozitív, akkor a bázis nem degenerált. Ellenkező esetben degenerált.

1.3. Definíció: A B bázist duál megengedettnek nevezzük a minimum (maximum) feladatra nézve, ha teljesül az, hogy

$$\mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{a}_i \leq (\geq) c_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.39)$$

Ha $i \in I$, akkor az (1.39) egyenlőséggel teljesül. Ha minden olyan i esetén, melyre $i \in I$, a határozott egyenlőség teljesül (1.39)-ben, akkor a bázis duál nem-degenerált. Ellenkező esetben duál-degenerált.

A lineáris programozással kapcsolatos legfontosabb ismereteket illetően hivatkozunk Prékopa (1968, 1975) könyvére, illetve (1996) cikkére.

A továbbiakban néhány ismert tételt említünk meg. Az elsőhöz szükségünk van az (1.38) feladat duálisára:

$$\max(\min) \mathbf{b}^T \mathbf{y}$$

$$\text{feltéve hogy} \quad (1.40)$$

$$A^T \mathbf{y} \leq (\geq) \mathbf{c}.$$

1.2. Tétel: Az (1.40) feladat megengedett megoldásai által meghatározott konvex poliéder csúcsainak halmaza megegyezik azoknak az \mathbf{y} vektoroknak a halmazával, amelyek megoldásai valamely $\mathbf{y}^T \mathbf{B} = \mathbf{c}_B^T$ egyenletnek, ahol B az (1.38) feladat duál megengedett bázisa. A tétel közismert bizonyítása elemi módszerekkel elvégezhető.

1.3. Tétel: (Gessel és Viennot (1985), Prékopa (1988)). Az (1.28) mátrix minden olyan minora (egy négyzetes rész determinánsa), melyben a fődiagonálisban (és akkor fölötte is) pozitív elemek állnak, pozitív.

E tétel felhasználásával Prékopa (1988) bebizonyította az alábbi tételt:

1.4. Tétel: *Tegyük fel, hogy az (1.38) feladat az (1.34) feladat tömör alakja. Ekkor a B bázis duál megengedett akkor és csak akkor, ha oszlopainak I index halmaza az alábbi típusú*

$$\begin{array}{rcc}
 & m \text{ páros} & m \text{ páratlan} \\
 \text{Min feladat} & i, i+1, \dots, j, j+1 & i, i+1, \dots, j, j+1, n \\
 \text{Max feladat} & 1, i, i+1, \dots, j, j+1, n & 1, i, i+1, \dots, j, j+1.
 \end{array}$$

Az 1.4. un. duál megengedett bázis struktúra tétel igen fontos az (1.34) feladat algoritmikus megoldása szempontjából.

A feladatot ugyanis a duál módszer segítségével könnyen meg tudjuk oldani. Ebben két igen fontos egyszerűsítési lehetőség áll rendelkezésünkre: (1) induló duál megengedett bázist egyszerűen tudunk nyerni, nem kell mást tennünk, mint a 2.3 tételnek megfelelő struktúrájú indexhalmazt és a hozzá tartozó vektorokat kiválasztani, (2.) ha valamely lépésben a bázisból kimenő vektort meghatároztuk, akkor a bázisba bejövő vektor egyértelműen adott azáltal, hogy annak indexe a 2.3 tétel szerinti struktúrát kell, hogy helyreállítsa. Ennek alapján az (1.34) feladat megoldására vonatkozó duál algoritmust az alábbiakban összegezzük.

1. Választunk egy B , a 2.3 tételnek megfelelő induló, duál megengedett bázist.
2. Ellenőrizzük, hogy fennáll-e a $B^{-1}\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$ reláció. Ha igen, menjünk a 4. lépésre. Ha nem, akkor választunk egy olyan j indexet, melyre $(B^{-1}\mathbf{b})_j < 0$ és menjünk a 3. lépésre.
3. Távolítsuk el a bázisból a B mátrix j -edik vektorát, s helyette vonjuk be azt a vektort, amely a duál megengedett bázis struktúrát helyreállítja.
4. Stop, B optimális bázis.

Az alábbiakban bebizonyítunk egy fontos tételt, melynek egy gyengébb változata szerepel Boros és Prékopa (1990) cikkében.

1.5. Tétel: *Jelöljék $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_s$ az (1.36) feladat megengedett megoldásai K konvex poliéderének csúcsait. Tekintsük a K halmaz Carathéodory-féle (1911) előállításában szereplő (konvex)conv $(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_s)$ halmazt.*

Ha $\mathbf{x} \in \text{conv}(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_s)$, akkor komponensei alternáló előjelűek, pozitív előjellel kezdődően, továbbá

$$|x_1| \geq |x_2| \geq \dots |x_m|. \quad (1.41)$$

Bizonyítás: Elegendő az állítást a megengedett megoldások konvex poliéderének csúcsain bebizonyítani, ugyanis a $\text{conv}(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_s)$ halmaz minden egyéb vektora a csúcsok konvex kombinációjaként áll elő. Legyen \mathbf{x} csúcsa a megengedett megoldások halmazának. Ekkor a 2.1 tétel szerint \mathbf{x} megoldása az

$$\mathbf{x}^T B = \mathbf{c}_B^T = (1, \dots, 1)^T \quad (1.42)$$

egyenletnek, valamely B duál megengedett megoldás esetén. Innen az adódik, hogy $\mathbf{x}^T = \mathbf{c}_B^T B^{-1}$. Ez a vektor viszont előfordul az

$$\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{c}_B^T \\ 0 & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\mathbf{c}_B^T B^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix} \quad (1.43)$$

mátrix alsó sorában. Az

$$\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{c}_B^T \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

mátrix inverzének első sorát képezve olyan minorokat kell alternáló előjellel ellátni, melyek a 2.2 tétel szerint pozitívak. Ebből következik, hogy az $(1, -\mathbf{c}_B^T B^{-1})$ sorvektor komponensei is alternáló előjelűek, a + jellel kezdődően.

□

Az (1.41) reláció hasonlóan bizonyítható, mint Boros és Prékopa (1989) cikkében a megfelelő állítás. A binomiális momentumprobléma egy másik változata lehetőséget nyújt arra vonatkozólag, hogy legalább r esemény bekövetkezésének a valószínűségére adjunk alsó és felső korlátokat. Ekkor az (1.34) feladatok helyett az alábbiakat foglal-

mazzuk meg:

$$\min(\max) \sum_{i=r}^n v_i$$

$$\text{feltéve, hogy} \tag{1.44}$$

$$\sum_{i=0}^n \binom{i}{k} v_i = S_k, \quad k = 0, 1, \dots, m.$$

Ha $v_{\min}^{(r)}$ és $v_{\max}^{(r)}$ jelentik az (1.34) feladatok optimum értékeit, akkor fennállnak az alábbi egyenlőtlenségek:

$$v_{\min}^{(r)} \leq P(V \geq r) \leq v_{\max}^{(r)} \tag{1.45}$$

Vegyük észre, hogy most megtartottuk az S_0 -hoz tartozó sort és a v_0 -hoz tartozó oszlopot a feladatban. A gondolatmenet, amelyet alkalmaztunk akkor, amikor az (1.32) feladatot az (1.34) feladatra redukáltuk, most nem alkalmazható. Ha az (1.43) feladatot az (1.38) alakba írjuk, akkor az A mátrix $(m+1) \times (n+1)$ -es, az \mathbf{x} és a \mathbf{c} vektorok $n+1$ komponensűek, \mathbf{b} pedig $m+1$ komponensű vektor. A \mathbf{c} vektor $(0, \dots, 0, 1, \dots, 1)^T$ alakú, ahol a zérók száma r . Az így nyert feladat számunkra az $r = n$ esetben lesz fontos. Erre vonatkozólag fennáll az alábbi duál megengedett bázis struktúra tétel.

1.6. Tétel: (Prékopa 1988). *A B bázis duál megengedett akkor és csak akkor, ha a bázis vektorainak I indexhalmaza ($|I| = m+1$) az alábbi struktúrák valamelyikébe tartozik:*

	<i>$m+1$ páros</i>	<i>$m+1$ páratlan</i>
<i>Min feladat</i>	$I \subset \{0, \dots, n-1\}$	$I \subset \{0, \dots, n-1\}$
	$i, i+1, \dots, j, j+1, n-1, n$	$0, i, i+1, \dots, j, j+1, n-1, n$
<i>Max feladat</i>	$0, i, i+1, \dots, j, j+1, n$	$i, i+1, \dots, j, j+1, n.$

Az $I \subset \{0, \dots, n-1\}$ esetekben a triviális, 0 alsó korlát adódik. Ez azt jelenti, hogy a feladat megoldásakor célszerű olyan induló bázist választani, melyre $I \not\subset \{0, \dots, n-1\}$. Az algoritmus során az \mathbf{a}_n vektort benn tartjuk a bázisban, ameddig lehet. Ha az \mathbf{a}_n vektort nem lehet már a bázisban tartani, akkor az új bázismegoldáson a célfüggvényérték 0, de egy ciklizálást elkerülő módszerrel tovább haladva, \mathbf{a}_n esetleg visszatérhet és az optimum érték pozitív lehet.

1.2. Alkalmazás rendszerek működési ideje alsó és felső korlátjának meghatározására

Az 1. szakaszban bevezettük az egyes komponensek élettartamára az X_1, \dots, X_n , továbbá az $\{X_i \leq t\}$, $i = 1, \dots, n$ eseményekre az A_i , $i = 1, \dots, n$ jelöléseket. A soros rendszer élettartamára az X , a párhuzamos rendszer élettartamára pedig az Y jelölést alkalmazzuk. Ekkor

$$X = \min(X_1, \dots, X_n)$$

$$Y = \max(Y_1, \dots, Y_n),$$

E valószínűségi változók eloszlásfüggvényére korábban az $F(t)$, illetve a $G(t)$ jelölést vezettük be:

$$F(t) = P(X \leq t)$$

$$G(t) = P(Y \leq t).$$

Bevezetjük még az

$$\bar{F}(t) = 1 - F(t)$$

$$\bar{G}(t) = 1 - G(t)$$

jelöléseket is.

Ezek alapján felírhatjuk, hogy

$$\bar{F}(t) = 1 - F(t) = 1 - P(A_1 \cup \dots \cup A_n) = P(\bar{A}_1 \cap \dots \cap \bar{A}_n), \quad (1.46)$$

$$\bar{G}(t) = 1 - G(t) = 1 - P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(\bar{A}_1 \cup \dots \cup \bar{A}_n). \quad (1.47)$$

Az A_1, \dots, A_n események is a t változó függvényei, ám ennek feltüntetésétől eltekintünk. A binomiális momentumok t -től való függését a továbbiakban feltüntetjük és S_k, \bar{S}_k helyett az $S_k(t), \bar{S}_k(t)$ jelöléseket alkalmazzuk.

Mind a soros, mind a párhuzamos rendszerek esetében két feladatpárt fogalmazhatunk meg annak a valószínűségnek a korlátozására, hogy a rendszer túlélje a t időpontot. Tekintsük előbb a soros rendszert. Az (1.46) képlet szerint az $\bar{F}(t)$ valószínűség korlátainak meghatározására a $P(A_1 \cup \dots \cup A_n)$, vagy a $P(\bar{A}_1 \cap \dots \cap \bar{A}_n)$ valószínűség korlátait kell meghatározunk. A $P(A_1 \cup \dots \cup A_n)$ valószínűség éles alsó és felső korlátjának

meghatározására megfogalmazzuk a

$$\min(\max) \sum_{i=1}^n v_i$$

feltéve, hogy

(1.48)

$$\sum_{i=1}^n \binom{i}{k} v_i = S_k(t), \quad k = 1, \dots, m$$

$$v_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n$$

lineáris programozási feladatokat.

Ezek optimum értékére bevezetjük a $V_{\min}(t)$ és a $V_{\max}(t)$ jelöléseket. Ekkor fennállnak az alábbi relációk:

$$V_{\min}(t) \leq P(A_1 \cup \dots \cup A_n) = 1 - \bar{F}(t) \leq \text{Min}(V_{\max}(t), 1) \quad (1.49)$$

$$\text{Max}(1 - V_{\max}(t), 0) \leq \bar{F}(t) \leq 1 - V_{\min}(t). \quad (1.50)$$

Az (1.50) relációból integrálás után azt kapjuk, hogy

$$\int_0^\infty [1 - V_{\max}(t)]_+ dt \leq \int_0^\infty \bar{F}(t) dt = E(X) \leq \int_0^\infty (1 - V_{\min}(t)) dt, \quad (1.51)$$

ahol $[x]_+ = x$, ha $x \geq 0$ és $[x]_+ = 0$, ha $x < 0$. A soros rendszer működési ideje várható értékének becslésére felhasználhatjuk az $\bar{F}(t) = P(\bar{A}_1 \cap \dots \cap \bar{A}_n)$ egyenlőséget is. Ekkor az alábbi feladatot fogalmazzuk meg:

$$\min(\max) v_n$$

feltéve, hogy

(1.52)

$$\sum_{i=0}^n \binom{i}{k} v_i = \bar{S}_k(t), \quad k = 0, 1, \dots, m$$

$$v_i \geq 0, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Ha ennek optimum értékeit $v_{\min}^{(n)}(t)$ és $v_{\max}^{(n)}(t)$ jelölik, akkor fennállnak az alábbi relációk:

$$v_{\min}^{(n)}(t) \leq P(\bar{A}_1 \cap \dots \cap \bar{A}_n) = \bar{F}(t) \leq v_{\max}^{(n)}(t) \quad (1.53)$$

$$\int_0^\infty v_{\min}^{(n)}(t) dt \leq \int_0^\infty \bar{F}(t) dt = E(X) = \int_0^\infty v_{\max}^{(n)}(t) dt. \quad (1.54)$$

Hasonlóképpen járunk el a párhuzamos rendszer esetében. Ha a $\bar{G}(t) = P(\bar{A}_1 \cup \dots \cup \bar{A}_n)$ egyenlőségből indulunk ki, akkor $\bar{G}(t)$ alsó és felső becslésének meghatározására az alábbi lineáris programozási feladatot írjuk fel:

$$\min(\max) \sum_{i=1}^n v_i$$

feltéve, hogy

(1.55)

$$\sum_{i=1}^n \binom{i}{k} v_i = \bar{S}_k(t), \quad k = 1, \dots, m$$

$$v_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Az optimum értékeket a $V_{\min}(t), V_{\max}(t)$ szimbólumokkal jelölve, fennállnak az alábbi egyenlőtlenségek:

$$V_{\min}(t) \leq \bar{G}(t) \leq \min(V_{\max}(t), 1) \quad (1.56)$$

$$\int_0^\infty V_{\min}(t) dt \leq \int_0^\infty \bar{G}(t) dt = E(Y) \leq \int_0^\infty \min\{V_{\max}(t), 1\} dt. \quad (1.57)$$

Ha viszont a $\bar{G}(t) = 1 - P(A_1 \cap \dots \cap A_n)$ egyenlőségből indulunk ki, akkor az alábbi LP szolgáltatja a korlátokat:

$$\min(\max) v_n$$

feltéve, hogy

(1.58)

$$\sum_{i=0}^n \binom{i}{k} v_i = S_k(t), \quad k = 0, 1, \dots, n$$

$$v_i \geq 0, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Ha $v_{\min}^{(n)}(t)$ és $v_{\max}^{(n)}(t)$ jelölik az optimum értéket, akkor fennállnak az alábbi egyenlőtlenségek:

$$v_{\min}^{(n)}(t) \leq P(A_1 \cup \dots \cup A_n) = 1 - \bar{G}(t) \leq v_{\max}^{(n)}(t) \quad (1.59)$$

$$1 - v_{\max}^{(n)}(t) \leq \bar{G}(t) \leq 1 - v_{\min}^{(n)}(t). \quad (1.60)$$

Az alábbi egyenlőtlenségből integrálással nyerjük a működési idő várható értékére vonatkozó korlátokat:

$$\int_0^{\infty} (1 - v_{\max}^{(n)}(t)) dt \leq \int_0^{\infty} \bar{G}(t) dt = E(Y) \leq \int_0^{\infty} (1 - v_{\min}^{(n)}(t)) dt. \quad (1.61)$$

Az (1.51), (1.54), (1.57) és az (1.61) integrálok meghatározásában a problémát az okozza, hogy az optimális bázis a t változó függvényében változik, tehát az éles korlátok meghatározásakor nem támaszkodhatunk csupán egy bázisra. Mindamellet az

$$E(X) = \int_0^{\infty} \bar{F}(t) dt$$

$$E(Y) = \int_0^{\infty} \bar{G}(t) dt$$

várható értékekre vonatkozólag egyetlen bázisra támaszkodva is adhatunk korlátokat, ezek azonban gyengébbek lesznek a fent említetteknél. Mielőtt bemutatnánk mi módon lehetséges ez, megállapodunk abban, hogy a soros rendszer esetében az (1.48), a párhuzamos rendszer esetében pedig az (1.55) LP-re támaszkodunk. Ez azt jelenti, hogy a működési idő várható értékére a soros rendszer esetében az (1.51), a párhuzamos rendszer esetében pedig az (1.57) formula szolgáltatja a kívánt korlátokat. Ismeretes, hogy ha az (1.58) lineáris programozási minimum (maximum) feladatnak B egy duál megengedett bázisa, akkor fennáll az alábbi egyenlőtlenség

$$\mathbf{c}_B^T B^{-1} \mathbf{b} \leq \mathbf{c}^T x_{opt} \quad (1.62)$$

$$(\mathbf{c}_B^T B^{-1} \mathbf{b} \geq \mathbf{c}^T x_{opt}),$$

ahol x_{opt} az optimális megoldás. A legjobb korlátokat akkor kapjuk, ha az (1.62)-ben vesszük B -re vonatkozólag a maximumot (minimumot), vagy ami ugyanaz, vesszük az optimális B bázist.

Ezt az elvet alkalmazhatjuk az $E(X), E(Y)$ várható értékek becslésére oly módon, hogy vesszük az (1.48) illetve az (1.55) feladatokban az adott duál megengedett B bázishoz tartozó célfüggvényértéket:

$$\mathbf{c}_B^T B^{-1} S(t), \quad \mathbf{c}_B^T B^{-1} \bar{S}(t), \quad (1.63)$$

ahol $\mathbf{c}_B^T = (1, \dots, 1)^T$, $S(t) = (S_1(t), \dots, S_m(t))$, $\bar{S}(t) = (\bar{S}_1(t), \dots, \bar{S}_m(t))$ és az így nyert függvények integráljai segítségével képezzük a korlátokat.

Ha az (1.51), (1.54) formulákra támaszkodva alkotjuk meg a korlátokat, akkor azt mondjuk, hogy ezek (t szerint) változó bázishoz tartozó korlátok. Ha pedig az (1.63) függvények integrálása révén nyerjük a korlátokat, akkor azt mondjuk, hogy ezek rögzített bázishoz tartozó korlátok. Ebben az utóbbi esetben is van lehetőségünk optimalizálásra, amint a későbbiekből kitűnik.

1.3. A feltéltér felbontása poliedrikus kúpokra

Az (1.38) lineáris programozási feladatban szereplő \mathbf{b} vektorok terét, tehát az R^m teret feltéltérnek nevezzük. Az \mathbf{x} vektorok \mathbb{R}^n terének pedig megoldástér a neve.

Az (1.38) feladatot az (1.48), vagy (1.52) feladatra fogjuk specializálni, midőn t rögzített pozitív szám.

Mind az (1.48), mind az (1.52) feladatok bázisai duál nem-degeneráltak. Ha egy bázis duál megengedett, akkor ahhoz, hogy optimális legyen, primál megengedettnek is kell lennie. Ha B egy duál megengedett bázis, akkor a bázis optimalitásának szükséges és elegendő feltétele a $B^{-1}\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$ egyenlőség.

Soroljuk fel képzeletben a duál megengedett bázisokat: B_1, \dots, B_r . Minthogy mindegyik duál nem-degenerált, a

$$B_1^{-1}\mathbf{b} \geq \mathbf{0}, \dots, B_r^{-1}\mathbf{b} \geq \mathbf{0} \quad (1.64)$$

relációk közös belső pont nélkül poliedrikus kúpokra osztják fel a

$$\{\mathbf{b} \mid A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\} \quad (1.65)$$

poliedrikus kúpot. Az (1.65) halmaz azoknak a \mathbf{b} vektoroknak a halmaza, melyekre az (1.38) feladatnak van megengedett megoldása. Az (1.65) halmaz fent említett típusú felosztása abból következik, hogy az (1.38) LP (mely az (1.48) és az (1.52) feladatok valamelyikét jelenti) rendelkezik megengedett megoldással és véges optimummal (megengedett megoldás azért van, mert a \mathbf{b} vektort ténylegesen létező valószínűségi változókkal kapcsolatos eseményekből számítjuk; véges optima pedig azért van, mert a megengedett megoldások halmaza korlátos) és a bázisok duál nem-degeneráltak.

Vezessük be \mathbf{b} helyett a $\mathbf{b}(t)$ jelölést. Egy rögzített t esetén a felosztó poliedrikus kúpok határpontjaitól eltekintve, csak egy teljesül az (1.64) egyenlőtlenségek közül. Ha ez a $B_i^{-1}\mathbf{b}(t) \geq \mathbf{0}$ egyenlőtlenség, akkor az optimum érték az adott t esetén, egyenlő a

$$\mathbf{c}_B^T B_i^{-1}\mathbf{b}(t) \quad (1.66)$$

értékkel.

Ha meg akarjuk kapni az (1.49) - (1.51) relációkban szereplő $V_{\min}(t)$ és $V_{\max}(t)$ értéket minden $t \geq 0$ számra, akkor erre két lehetőség adódik, ezek a következők.

I. Felsoroljuk a B_1, \dots, B_r duál megengedett bázisokat és mindegyik B_i esetében meghatározzuk a t értékeknek azt az intervallumát, amelyre teljesül az, hogy

$$B_i^{-1}\mathbf{b}(t) \geq 0, \quad t \in J_i. \quad (1.67)$$

A $J_i, i = 1, \dots, r$ intervallumok egyesítése egyenlő a $\{t|t \geq 0\}$ halmazzal, közülük bármely kettőnek legfeljebb csak a határpontjai lehetnek közösek.

II. A t változót növeljük 0-tól ∞ -ig és közben regisztráljuk, hogy mely bázisokra teljesül a primál megengedettség. Most is ugyanezeket a $J_i, i = 1, \dots, r$ intervallumokat kapjuk, legfeljebb más sorrendben.

Ha B_1, \dots, B_r az (1.48) feladatra specializált (1.38) minimum feladat duál megengedett bázisai, akkor az (1.51) egyenlőtlenségben szereplő jobb oldali integrálra azt kapjuk, hogy

$$\int_0^{\infty} (1 - V_{\min}(t)) dt = \sum_{i=1}^r \int_{J_i} (1 - \mathbf{c}_{B_i}^T B_i^{-1} \mathbf{b}(t)) dt. \quad (1.68)$$

Ha viszont B_1, \dots, B_r a maximum feladat duál megengedett bázisai, akkor a

$$\int_0^{\infty} [1 - V_{\max}(t)]_+ dt = \sum_{i=1}^r \int_{J_i} \text{Max}(1 - \mathbf{c}_{B_i}^T B_i^{-1} \mathbf{b}(t), 0) dt \quad (1.69)$$

reláció adódik. Teljesség kedvéért felírjuk az (1.51) egyenlőtlenség jobb és bal oldalán álló integrálokat is ilyen alakban.

Ha B_1, \dots, B_r az (1.48) feladatra specializált (1.38) minimum feladat duál megengedett bázisai, akkor azt kapjuk, hogy

$$\int_0^{\infty} (1 - V_{\min}(t)) dt = \sum_{i=1}^r \int_{J_i} (1 - \mathbf{c}_{B_i}^T B_i^{-1} \mathbf{b}(t)) dt. \quad (1.70)$$

Ugyanígy, ha a bázisok a maximum feladat esetében duál megengedettek, akkor a

$$\int_0^{\infty} [1 - V_{\max}(t)]_+ dt = \sum_{i=1}^r \int_{J_i} (1 - \mathbf{c}_{B_i}^T B_i^{-1} \mathbf{b}(t), 0) dt \quad (1.71)$$

reláció adódik. Ha valamely J_i intervallum degenerált, vagyis egy pontra zsugorodik, akkor az ezen vett integrál 0, ez az integrál az összegből elhagyható. Felvetődik a kérdés, hogy sok, vagy kevés J_i intervallum megjelenésére számíthatunk-e a fenti összegekben? Illusztrációként egy egyszerű példát veszünk, melyben valamennyi duál megengedett bázis előfordul az összegben. Tegyük fel, hogy X_1, \dots, X_n exponenciális eloszlásúak, $\lambda = 1$ paraméterrel és legyen $n = 2$. Ekkor

$$S_1(t) = n(1 - e^{-t}), \quad S_2(t) = \binom{n}{2}(1 - e^{-t})^2. \quad (1.72)$$

Az (1.48) minimum feladat duál megengedett bázisai

$$B_i = (\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_{i+1}), \quad i = 1, \dots, n - 1. \quad (1.73)$$

A maximumfeladatnak egyetlen duál megengedett bázisa van:

$$B = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_n) \quad (1.74)$$

1.4. Vasút közlekedési alkalmazás

Ebben a szakaszban Nemesdy (1966) és Megyeri (1991, 1994) egyetemi tankönyvei alapján olyan vasútközlekedési modelleket ismertetünk, melyek esetében a közlekedési rendszer megbízható működésének az elemzésére alkalmazni lehet a disszertációban kidolgozott valószínűségbecslési eljárásokat.

A vasúti közlekedés modellezése a soros és párhuzamos rendszerek figyelembe vételével számos műszaki elem működését, meghibásodását, illetve a működésig eltelt időt tartalmazza.

A vasúti közlekedés, mint a szárazföldi közlekedés egyik ágazata - személyeknek és áruknak olyan szabályszerűen ismétlődő tömeges helyváltoztatása, amely a vasút sajátos műszaki eszközeinek (pálya, jármű, mozgóerő) igénybevételével valósul meg.

A közlekedésen belül a vasúti közlekedés legfontosabb előnyei:

- energiatakarékos tulajdonsága,
- környezetbarát volta, ezen belül kedvező helyszükséglete,
- zaj és rezgésszintje,
- levegő szennyezésének mértéke,
- talaj és vízvédelme (a közúttal szemben elmarad a téli sózás),
- biztonsága, versenyképessége.

A vasút üzemét alapvetően a forgalom összetétele határozza meg, mely szerint három alapvető rendszert különböztetünk meg:

- Vegyes forgalmú, vagy európai rendszert, melynek lényege, hogy ugyanazt a pályát a gyorsabb közlekedő személyvonatok és a lassabban közlekedő tehervonatok egyaránt használják.
- Nagy sebességű személyforgalmú rendszer esetén a pályán csak nagy sebességű személyvonatok közlekednek.

- Teherforgalmú rendszernél a pályát a nagy terhelésű tehervonatok kívánalmi határozzák meg.

A vasúti közlekedés műszaki elemei közül – a pálya, jármű és a vonóerőmű mellett – a vasúti állomások, pályaudvarok rendkívül fontos szerepet töltenek be a vasút életében.

Az állomások feladata: a személy és áruforgalmi igények kielégítése mellett a vonatok találkozásának, megelőzésének és kitéréseinek a lehetővé tétele, illetve egyéb vasútüzemi feladatok ellátása.

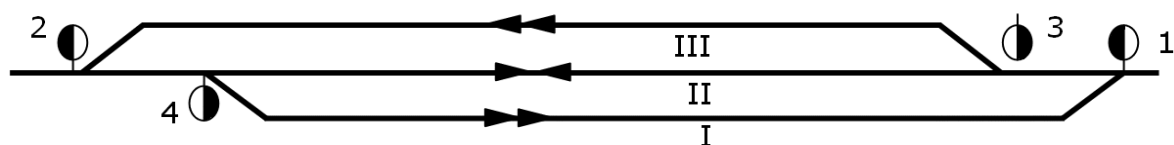
Az állomások feladatai tehát kétirányúak: a személy és teherszállítással összefüggő ún. kereskedelmi feladatok, melyek forgalmi és vontatási részekből állnak.

Az állomások helyes, korszerű a lehető legkisebb számú kitérőkkel való kialakítása rendkívül összetett műszaki –gazdasági feladat, minthogy alapvetően befolyásolja a vasúti teljesítőképességet, üzemének, fenntartásának gazdaságosságát.

Az állomások csoportosítása történhet:

- A pályához való elhelyezkedésük alapján, pl: végállomás, közbenső állomás, csatlakozó állomás, stb.
- Helyszínrajzi elrendezés szerint: átmenő alakú, fejállomások.
- Forgalmi üzemi szempontból: középállomás, rendelkező állomás, személypályaudvar, rendelkező pályaudvar, stb.

Tekintsünk egy egyszerű példát, egy olyan állomást, amely három vágányból és négy váltóból áll (3. ábra). A többi irányító műszaki berendezést, amely az állomás működéséhez szükséges jelen példánkban nem vesszük figyelembe.



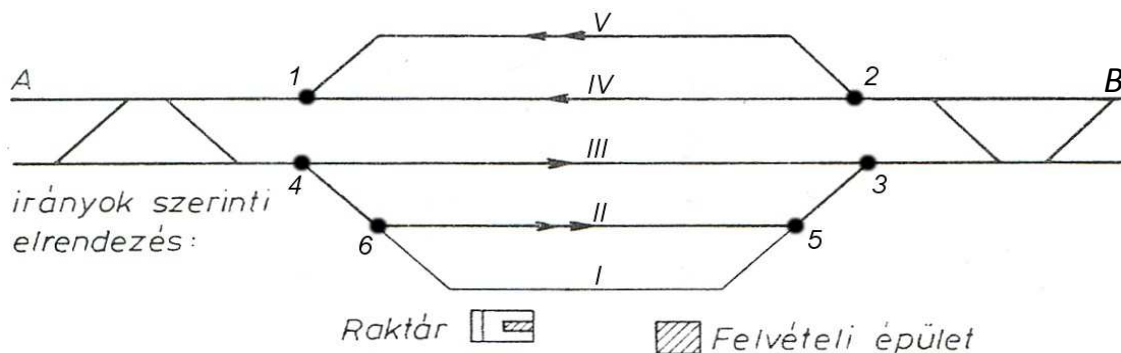
3. ábra. Egyszerű állomás

A váltókart arab, a vágányokat római számokkal jelölve, hat olyan különböző meghibásodás adódhat, amely során az állomás működésképtelen. Ezeket összefoglalva

Lehetséges esetek	Meghibásodások
A	2
B	1
C	4 és III.
D	3 és 1
E	I. és II. és III.
F	3 és 4

Nyilván a fenti példa egy leegyszerűsített eset, mégis 6 olyan meghibásodás történhet, amikor az állomás működésképtelen.

Tekintsünk most egy bonyolultabb példát, amely kétvágányú vonal középállomása, amint az a 4. ábrán látható. Az állomás gerince a két átmenő vágány mellett kétoldalt elhelyezett, irányok szerinti elrendezésű (üzemű) megelőző vágány. Ezen kívül még egy raktári vágány található a felvételi épület és az áruraktár, illetve rakodóhelyek oldalán.

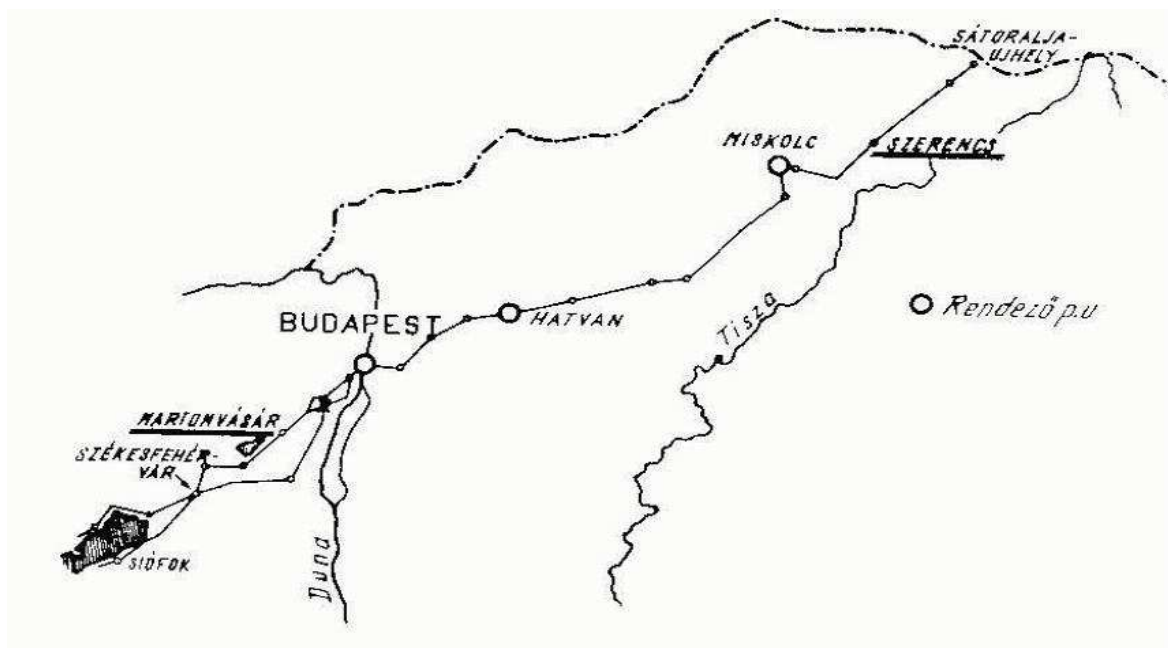


4. ábra. Kétvágányú vonal középállomásai irányok szerinti megelőzéssel

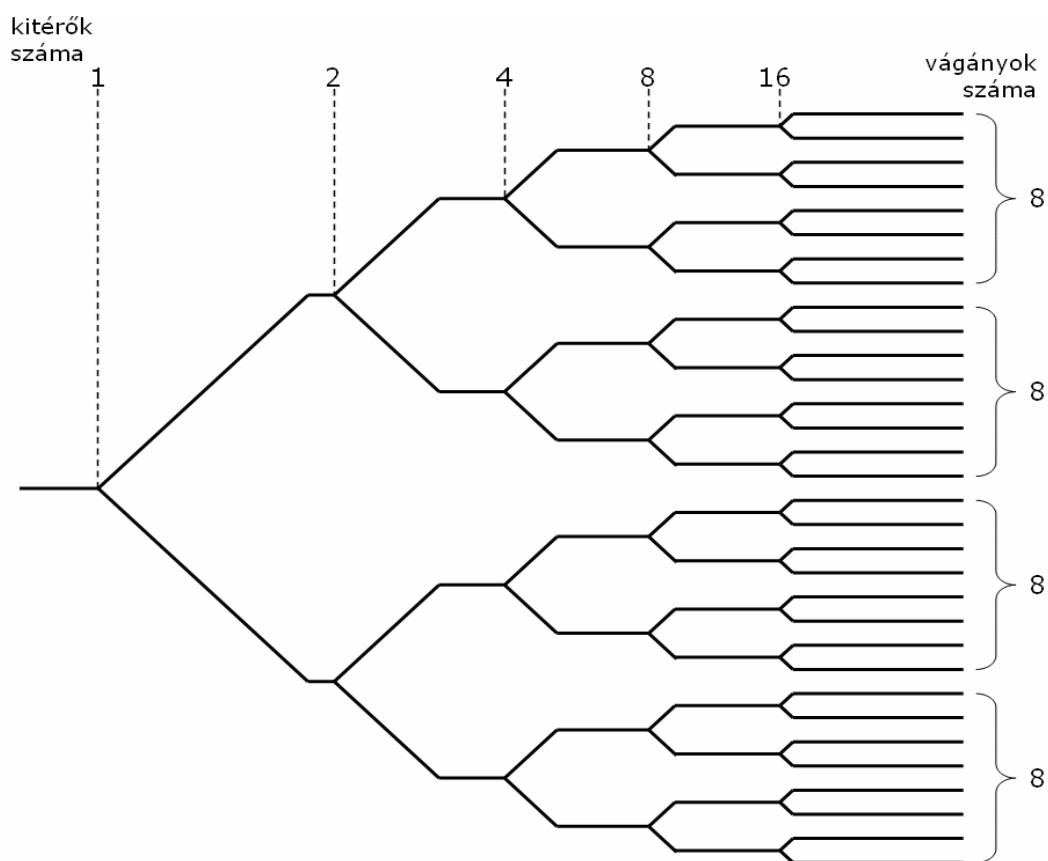
Ha csak a váltókarok és a vágányok meghibásodását tekintjük, akkor az előző egyszerűsített esethez képest már 13 olyan eset számolható össze, amikor az állomás működésképtelen.

Kövessük figyelemmel egy bonyolultabb rendszer felépítését! Egy teherkocsi útját végigkísérjük a feladóállomástól a végállomásig, pl. Martonvásártól Szerencsig (5. ábra).

A kocsit Budapest felé haladó kezelő tehervonat sorozza be és viszi el. A kezelő tehervonat az egyes állomásokon egy sor kocsit lead, másokat felvesz. Látjuk tehát, hogy a Martonvásár - Szerencs közötti kb. 220km úthosszon a figyelt teherkocsit összesen három tehervonat vitte a feladástól a leadásig, s közben, ami a feladatunk szempontjából fontos, három rendező pályaudvaron ment keresztül. Ahhoz, hogy a pályaudvarok működésének várható értékére csak a vágánykapcsolók és a vágányok figyelembe vételével becslést tudjunk adni, tekintsük át a következőket.



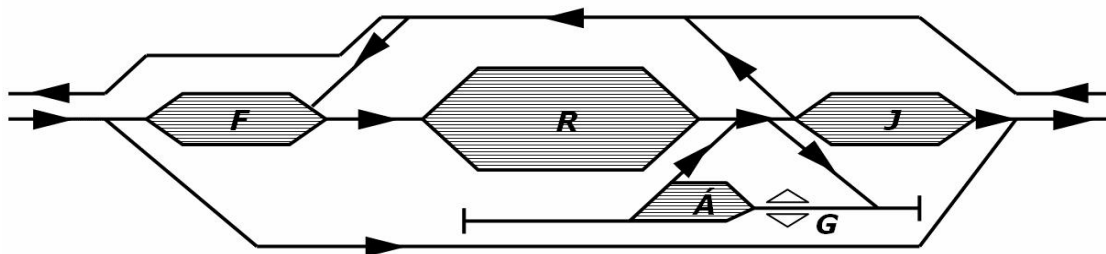
5. ábra. Egy megrakott teherkocsi útja Martonvásártól Szerencsig



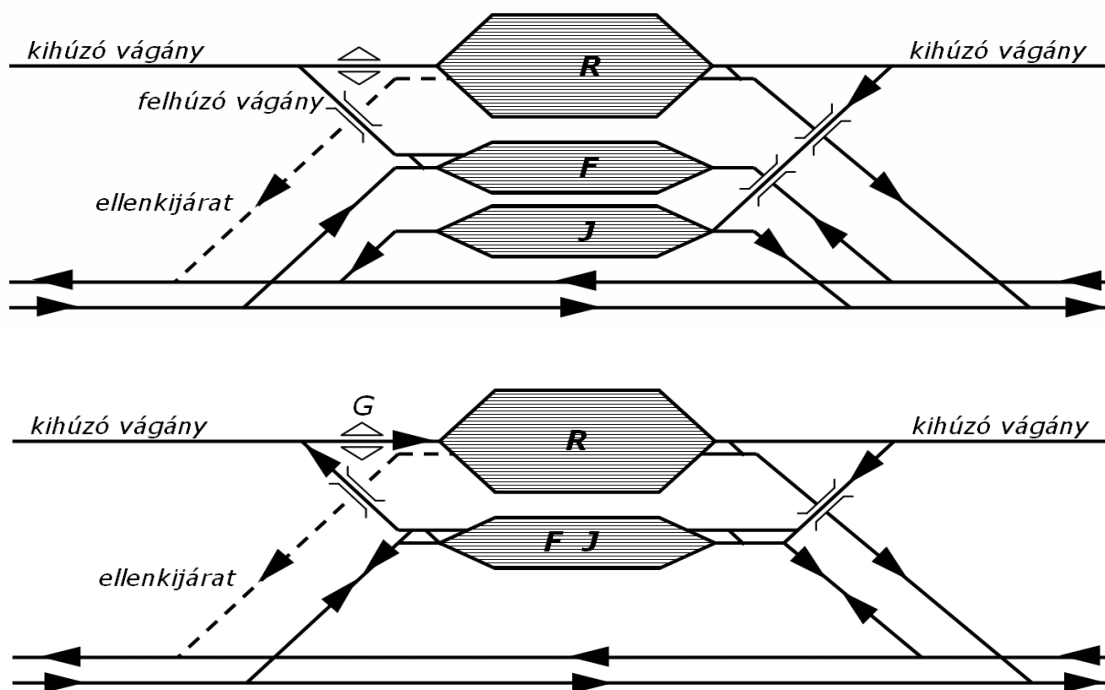
6. ábra. Nyalábos lóra

A rendező pályaudvarok természetesen szabványos vágánykapcsolások segítségével működnek. Pl: Kettőnél több, azonos szabványos távolságra fekvő párhuzamos vágány-nak egymással és egy fővágánnyal történő összekapcsolását lórának nevezzük. A 6. ábrán egy nyalábos lórát mutatunk be, melyek a rendező pályaudvarok nélkülözhetetlen elemei.

A nyalábos líra bemutatását követően ismerkedjünk meg egy-egy rendező pályaudvar rajzával, ahol a soros és párhuzamos rendszerek jól követhetők (7 és 8. ábra).



7. ábra. Folytatólagos elrendezésű rendezőpályaudvar



8. ábra. Párhuzamos elrendezésű rendezőpályaudvar

Ha az ismertített vágány és vágánykapcsoló-rendszerek megbízható működési idejének várható értékére kell alsó és felső korlátot adnunk, akkor első lépésként keressük meg a belépési és kilépési pontok közötti összes lehetséges utat. Ez elvileg könnyen végrehajtható feladat, ismert algoritmusok léteznek a megoldására. Problémát a lehetséges utak igen nagy száma jelent, ez gyakorlatilag lehetetlenné teszi az összes lehetséges út elfogadható idő alatti megkeresését. A létező összes út megkeresése helyett azonban elegendő számunkra egy rögzített t időpontig „legmegbízhatóbban működőképes” néhány, de esetleg még továbbra is meglehetősen nagy számú út megkeresése. Mivel a szóbanforgó hálózatok tipikusan nem tartalmazzak körutat, azért erre a célra használhatók a legrövidebb néhány utat megkereső algoritmusok (legyen egy él "hossza" az él által reprezentált műszaki elem legalább t ideig történő meghibásodás nélküli működési valószínűségének a mínusz egyszerese, vagy ami lényegében ugyanaz, annak a valószínűsége, hogy az adott műszaki elem t időpont előtt meghibásodik). Ezekről bővebben a Bakó-Kas (1977) és az Epstein (1999) cikkekben lehet olvasni. Ha tehát csak a t időpontig legmegbízhatóbban működő első p útra figyelünk, ahol p néhány száz is lehet, akkor ha $A_i(t)$ azt az eseményt jelenti, hogy az i -edik út a t időpontig működőképes ($i = 1, \dots, p$), akkor a rendszer t időpontig való megbízható átjárhatóságának a valószínűségét

$$P(A_1(t) + \dots + A_p(t))$$

adja meg, hiszen ez a valószínűség azt fejezi ki, hogy legalább egy út a t időpontig átjárható. Ezért az 1.2 szakaszban kidolgozott valószínűségbecslési eljárások alkalmazhatóak ennek a valószínűségnek a becslésére is. Ennek menete a következő.

Legyen a vágány és vágánykapcsoló-rendszert leíró hurokmentes irányított gráf $(\mathcal{N}, \mathcal{A})$, ahol \mathcal{N} a csúcsok halmaza, \mathcal{A} az élek halmaza. Ne csak az egyes vágány szakaszokat, hanem az azokat összekötő vágánykapcsolókat is tekintsük úgy, mint a gráf éleit, az így kialakított élek közötti kapcsolódási pontokat pedig tekintsük a gráf csúcsainak. Az így kialakított gráfban legyen az élek száma m , a csúcsok száma pedig n . Legyen az 1-es kezdő csúcs a vágány és vágánykapcsoló-rendszer belépési pontja, míg az n -nel azonosított befejező csúcs a vágánykapcsoló-rendszer kilépési pontja. Tegyük fel továbbá, hogy p különböző út létezik a kezdő csúcsból a befejező csúcsba, vagy ha ezek száma túl nagy, akkor legyen p a figyelembevett néhány, de még elég sok, legmegbízhatóbban

működő út száma. Ezeket az utakat egy $A = (a_{ij})$ út-él incidencia mátrixszal írhatjuk le:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ha a } j \text{ él szerepel az } i \text{ útban,} \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

Legyen $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_m)^T$ a vágány és vágánykapcsoló-rendszer elemei véletlen működési ideiből képezett oszlopvektor és jelölje P_1, \dots, P_p a kezdő eseményből a befejező eseménybe vezető utakat, mint élhalmazokat. Ekkor ha $R(\xi)$ jelöli a vágány és vágánykapcsoló-rendszer véletlentől függő hibátlan működési időtartamát, akkor az úgy írható fel, mint

$$R(\xi) = \max_{1 \leq i \leq p} \min_{j \in P_i} \xi_j.$$

Az $R(\xi)$ valószínűségi változó eloszlásfüggvényét jelölje $G(t)$:

$$G(t) = P(R(\xi) \leq t)$$

és vezessük be ismét a

$$\bar{G}(t) = 1 - G(t)$$

jelölést is. Ekkor az (1.7) képlet értelmében

$$E(R(\xi)) = \int_0^{\infty} \bar{G}(t) dt. \quad (1.75)$$

Mivel $\bar{G}(t)$ úgy írható, mint

$$\bar{G}(t) = P(R(\xi) > t) = P\left(\max_{1 \leq i \leq p} \min_{j \in P_i} \xi_j > t\right) = P(A_1(t) + \dots + A_p(t)),$$

ahol most

$$A_i(t) = \left\{ \min_{j \in P_i} \xi_j > t \right\}, \quad i = 1, \dots, p,$$

azért a $\bar{G}(t)$ valószínűség becslésére ugyanúgy alkalmazhatjuk az 1.1 szakaszban ismertett valószínűségbecslési módszereket, mint ahogyan az 1.2 szakaszban azt párhuzamos rendszerek esetében tettük.

Ezzel példát mutattunk olyan műszaki rendszerre, amely a maga fizikai valóságában se nem soros, se nem párhuzamos, mégis a vele kapcsolatban felmerülő megbízhatósági

feladat egy olyan virtuális rendszer elemzését követeli meg, amelyik párhuzamosnak tekinthető. Esetünkben a kezdő pontból a befejező pontba vezető utak rendszere az, ami párhuzamos működési elvű. Ugyanakkor az is látható, hogy az egyes utak megbízható működési idejei egymástól nem függetlenek, hiszen bizonyos műszaki elemeket közösen használhatnak. Ha a rendszert alkotó műszaki elemek véletlentől függő hibátlan működési idejei egymástól függetlenek, akkor viszonylag könnyen lehet számítani egy, kettő illetve akár néhány, de nem túl sok út t ideig való együttes hibátlan működési ideinek a valószínűségeit, hiszen egy út esetén:

$$P(A_i(t)) = P\left(\left\{\min_{j \in P_i} \xi_j > t\right\}\right) = P\left(\prod_{j \in P_i} \{\xi_j > t\}\right) = \prod_{j \in P_i} P(\{\xi_j > t\}), \quad i = 1, \dots, p,$$

két út esetén:

$$\begin{aligned} P(A_{i_1}(t)A_{i_2}(t)) &= P\left(\left\{\min_{j_1 \in P_{i_1}} \xi_{j_1} > t\right\} \left\{\min_{j_2 \in P_{i_2}} \xi_{j_2} > t\right\}\right) = \\ &= P\left(\prod_{j \in P_{i_1} \cup P_{i_2}} \{\xi_j > t\}\right) = \prod_{j \in P_{i_1} \cup P_{i_2}} P(\{\xi_j > t\}), \quad 1 \leq i_1 < i_2 \leq p, \end{aligned}$$

illetve r út esetén:

$$\begin{aligned} P(A_{i_1}(t) \cdots A_{i_r}(t)) &= P\left(\left\{\min_{j_1 \in P_{i_1}} \xi_{j_1} > t\right\} \cdots \left\{\min_{j_r \in P_{i_r}} \xi_{j_r} > t\right\}\right) = \\ &= P\left(\prod_{j \in P_{i_1} \cup \cdots \cup P_{i_r}} \{\xi_j > t\}\right) = \prod_{j \in P_{i_1} \cup \cdots \cup P_{i_r}} P(\{\xi_j > t\}), \\ &1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq p, \end{aligned}$$

Az utak r számát p -ig növelve a teljes Poincare formulát végigszámolhatnánk és így a pontos valószínűség értéket is megkaphatnánk. Ezt azonban nem tehetjük meg, mert így $2^p - 1$ ilyen típusú valószínűséget kellene számolni, ami 100-as nagyságrendben megmaradó, legmegbízhatóbban működőnek tekinthető út esetén már kivitelezhetetlen.

Itt jegyezzük meg, hogy érdekes lehet legalább két, három vagy több átjárási út működési valószínűségének a becslése is. Az (1.44) lineáris programozási feladatok optimális megoldásaiból kiindulva ezek a becslések is az eddigiekhez hasonlóan lennének elvégezhetőek. Ezeket itt nem részletezzük. A megbízható átjárhatósági idő várható értékét az (1.75) képlet alapján ugyanúgy integrálással nyerhetjük, mint az az 1.2 szakasz (1.57) és (1.61) képleteiben történt.

1.5. Városi közlekedési alkalmazás

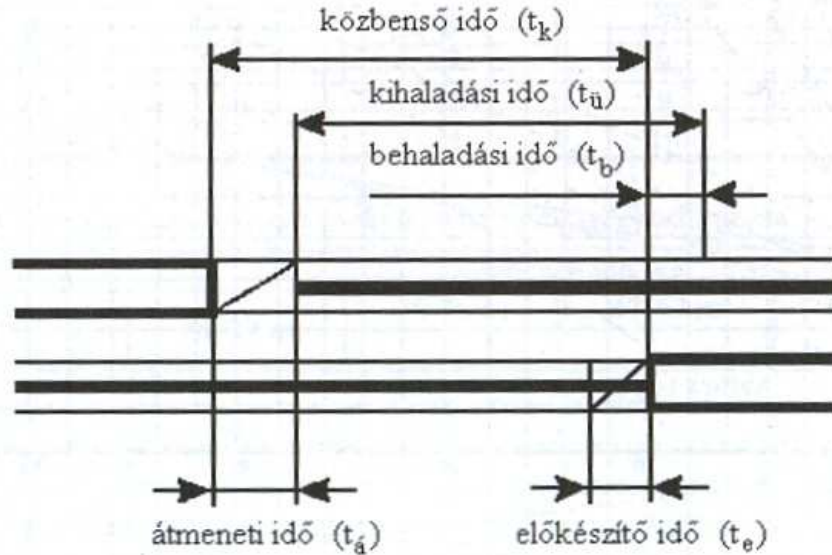
Ebben a szakaszban egy városi, jelzőlámpákkal is felszerelt, csúcsidőben zsúfolt utcai hálózat elkerülésére jelzést kiadó módszert dolgozunk ki. A jelzés kiadását ahhoz a feltételhez kötjük, hogy egy előírt valószínűségi szintnél nagyobb legyen az esély arra, hogy a zsúfolt utcai hálózat egyetlen lehetséges útvonalán se lehessen már az S kiindulási pontból a T célpontba rövidebb idő alatt eljutni, mint amennyi idő alatt a jóval hosszabb kerülőúton azt különben meg lehetne tenni. Példaként gondolhatunk arra, hogy az M1-M7-es autópályáról az M3-as autópályára érdemes-e Budapest zsúfolt utcáin, a legrövidebb útvonalat keresve keresztülhajtani, vagy érdemesebb hosszabb kerülőúton, például az M0-ás körgyűrűn eljutni oda. A kidolgozandó modellünk szempontjából közömbös, hogy a döntéshozók mekkora valószínűségi szintet írnak elő, illetve, hogy mennyivel gyorsabb áthaladást kívánnak meg a kerülőúton történő átjutásra. A városi közlekedési hálózatot hasonlóan modellezte Yen-Ling Cheu és Hsu-Hao Yang (2003) dolgozatában. A jelzőlámpás kereszteződéseken történő áthaladás modellezését jól szemlélteti a 9. ábra, mely Fi István (2005) könyvében található.

A városon keresztül haladó utcai hálózat, a vágány és vágánykapcsoló rendszerhez hasonlóan, matematikailag úgy modellezhető, mint egy $(\mathcal{N}, \mathcal{A})$ hurokmentes irányított gráf, ahol \mathcal{N} a csúcsok halmaza, \mathcal{A} az élek halmaza. Nem csak az egyes utcaszakaszokat, hanem az esetenként előforduló jelzőlámpás áthaladási helyeket is úgy tekintjük, mint a gráf éleit. Az így kialakított élek közötti kapcsolódási pontokkal pedig a gráf csúcsait azonosítjuk. Az így meghatározott gráfban legyen az élek száma m , a csúcsok száma pedig n . Legyen az 1-es kezdő csúcs a kiindulási pontunk, míg az n -nel azonosított befejező csúcs a célpontunk. Tegyük fel továbbá, hogy p különböző út létezik a kezdő csúcsból a befejező csúcsba, vagy ha ezek száma túl nagy, akkor legyen p a figyelembevett néhány, de még elég sok, általában gyors áthaladást biztosító útvonal száma. Ezek azonosítására több lehetőség is kínálkozik. Kézenfekvő módszer az, hogy a budapesti városi közlekedésben nagy gyakorlattal bíró autósoktól kérünk általuk használt útvonal leírásokat és a teljes budapesti utcahálózatnak csak azokat a szakaszait vesszük be az irányított gráfunkba, amelyek legalább egy útvonal által érintve vannak. Másik lehetőség, hogy a

$$t_k = t_a + t_{\bar{u}} - t_b$$

ahol:

- t_a : átmeneti idő [s],
- $t_{\bar{u}}$: kihaladási idő [s],
- t_b : behaladási idő [s].



9. ábra. Közbenső idő értelmezése jelzőlámpás kereszteződésre

teljes budapesti utcahálózatot bevesszük az irányított gráfunkba, majd megkeressük a kiindulási pontból a célpontba vezető összes lehetséges útvonalat. Minthogy ezek száma nagyon nagy lenne, célszerű az összes lehetséges útvonal kereséskor csak az úthossz szerint legrövidebb p számú útvonalat megkeresni. Erre hatékony gráfelméleti algoritmusok állnak rendelkezésre, lásd például Eppstein (1999).

Akárhogyan határoztuk is meg a figyelembe venni szándékozott útvonalakat, azok egy $p \times m$ méretű $A = (a_{ij})$ út-él incidencia mátrixszal lesznek leírhatók:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ha a } j \text{ él szerepel az } i \text{ útban,} \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

Legyenek ξ_1, \dots, ξ_m az egyes utcaszakaszokon, illetve jelzőlámpás kereszteződéseken történő véletlen átjutási idők. Képezzük ezekből a $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_m)^T$ oszlopvektort és jelöljük P_i -vel, $i = 1, \dots, p$, a kezdő pontból a célpontba vezető utakat, mint élhalmazokat.

Ekkor, ha $T(\xi)$ jelöli a jelzőlámpákkal is felszerelt utcai hálózaton történő áthaladás véletlentől függő időtartamát, akkor az úgy írható fel, mint

$$T(\xi) = \min_{1 \leq i \leq p} A_i \xi = \min_{1 \leq i \leq p} \sum_{j \in P_i} \xi_j, \quad (1.76)$$

ahol A_i az A út-él incidencia mátrix i -edik sora, mint sorvektor.

Ha t jelöli a kerülő úton történő áthaladás determinisztikusnak tekintett időtartamát, vagy annak valamekkora, a döntéshozók által megadott hányadát és q a városon keresztül történő, ennyi idő alatti áthaladás lehetőségének a megkívánt valószínűségi szintjét, akkor

$$P(T(\xi) > t) > q \quad (1.77)$$

teljesülése esetén kell a kerülőút használatát javasolni.

Mivel feltehetjük, hogy az egyes figyelembevett útvonalak mindegyike elég sok utcaszakaszon, illetve jelzőlámpás kereszteződésen halad át, azért bevezetve az

$$\eta_i = \sum_{j \in P_i} \xi_j, \quad i = 1, \dots, p \quad (1.78)$$

valószínűségi változókat, a centrális határeloszlástétel értelmében feltehető, hogy ezek normális eloszlásúak. Ha $i \neq k$ index párra a P_i és a P_k utaknak nincs egyetlen közös élük sem, akkor a megfelelő η_i és η_k valószínűségi változók függetlenek, feltéve, hogy a ξ_1, \dots, ξ_m valószínűségi változók függetlenek. Ha azonban valamely $i \neq k$ index párra a P_i és a P_k utaknak közös élük is van, akkor a közös élek szórásnégyzeteiknek megfelelő pozitív kovarianciát hoznak létre a megfelelő η_i és η_k valószínűségi változók között. Ezért az η_1, \dots, η_p valószínűségi változók együttes eloszlása korrelált p -dimenziós normális eloszlás, melyre vonatkozó valószínűségek számításához többdimenziós numerikus integrálás szükséges. Ez nagy p esetén igen számításidőigényes feladatot jelent. Ezért inkább tegyük a következőt. Alakítsuk át az (1.77) képletben szereplő valószínűséget az (1.76) és az (1.78) képletek figyelembevételével a következőképpen:

$$\begin{aligned} P(T(\xi) > t) &= P\left(\min_{1 \leq i \leq p} \eta_i > t\right) = P(\eta_1 > t, \dots, \eta_p > t) \\ &= 1 - P(\{\eta_1 < t\} \cup \dots \cup \{\eta_p < t\}) \end{aligned} \quad (1.79)$$

Ezzel a kerülőút használatának javaslatát kiváltó (1.77) egyenlőtlenség ekvivalens módon úgy fogalmazható, hogy

$$P(\{\eta_1 < t\} \cup \dots \cup \{\eta_p < t\}) < 1 - q. \quad (1.80)$$

Az (1.80) kritérium szavakban úgy fogalmazható meg, hogy ha még $1 - q$ -nál több esélye van egy autósnek arra, hogy a kerülőúton történő áthaladás idejénél, vagy annak valamekkora hányadánál rövidebb idő alatt átjusson a városon keresztül haladó utak valamelyikén, akkor választhatja azt. Ha ez már nem lehetséges, akkor figyelmeztetni kell őt és igyekezni a kerülőútra terelni. Nyilván az $1 - q$ -val jellemzett kockázat vállalási szint személyenként változó lehet, azonban a figyelmeztetés mindenki számára értékes információt jelenthet. A városon éppen leggyorsabban keresztül vezető út megtalálásának a segítése más probléma, ahhoz az aktuális forgalmat is figyelő, különböző GPS rendszerek nyújthatnak segítséget.

Mivel az (1.80) kritérium az $A_i = \{\eta_i < t\}, i = 1, \dots, p$ események uniójának a valószínűségét tartalmazza, arra könnyen nyerhetünk felső becsléseket a disszertáció 1.1 szakaszában ismertetett binomiális momentum problémák segítségével. Ehhez csak az $A_i, i = 1, \dots, p$ események, és a közülük kiválasztott kettő, három és esetleg több esemény együttes bekövetkezésének a valószínűségét kell tudni meghatározni. Ez a p -dimenziós együttes normális eloszlás alacsony dimenziós peremeloszlásai eloszlásfüggvényértékének a meghatározását igényli csak, ami lényegesen könnyebb feladat, mint az esetleg nagyon nagy dimenziós együttes eloszlás eloszlásfüggvényének a számítása.

Módszerünk előnye az, hogy az egyes utcaszakaszokra, illetve jelzőlámpás kereszteződésekre elég az éppen várható áthaladási időt és annak szórását megbecsülni, a centrális határeloszlás tétel alkalmazása miatt közömbös annak a valószínűségeloszlása. Ez egy egyszerű monitorozással, illetve esetenkénti mintavétellel bármikor elvégezhető. Megjegyezzük, hogy az egymáshoz közeli utcaszakaszok véletlen áthaladási idejei feltehetően sztochasztikus kapcsolatban vannak egymással. Semmi akadályja azonban, hogy erre vonatkozó adatokat is gyűjtsünk és ne csak az egyes utcaszakaszok, illetve jelzőlámpás kereszteződések $E(\xi_i), i = 1, \dots, m$ várható áthaladási idejeit, $D^2(\xi_i) = E(\xi_i^2) - E(\xi_i)^2, i = 1, \dots, m$ szórásnégyzeteit becsüljük meg, hanem az azok

közötti $c_{ij} = E(\xi_i \xi_j) - E(\xi_i)E(\xi_j)$, $1 \leq i < j \leq m$ kovarianciákat is, mely esetben az

$$\eta = A\xi$$

vektor valószínűségi változó normális együttes eloszlására azt kapjuk, hogy a várható érték vektora

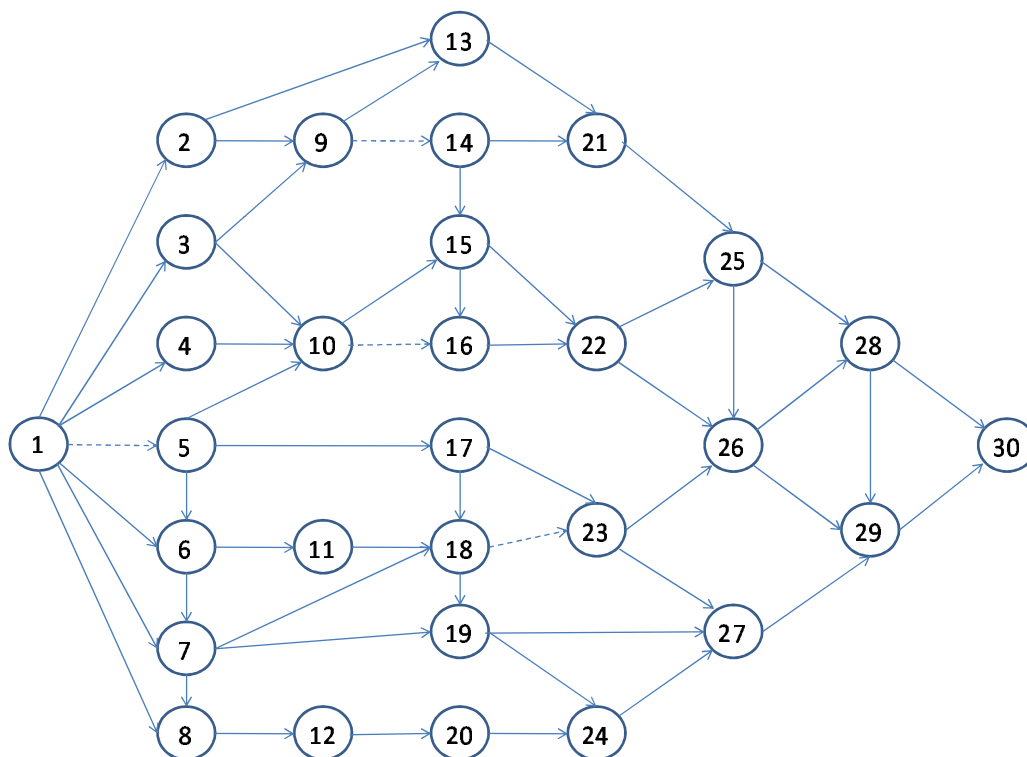
$$E(\eta) = AE(\xi),$$

a kovariancia mátrixa pedig

$$C_\eta = AC_\xi A^T,$$

ahol $C_\xi = (c_{ij})$ a ξ valószínűségi vektorváltozó kovariancia mátrixa, mely fődiagonálisában a $c_{ii} = D^2(\xi_i)$, $i = 1, \dots, m$ szórásnégyzetek állnak.

Illusztratív példaként tekintsük 10. ábrán látható utcahálózatot, melyben a szaggatott vonallal jelölt élek a jelzőlámpás kereszteződéseknek felelnek meg.



10. ábra. Utcahálózat jelzőlámpákkal

A 10. ábra utcahálózata 54 szakaszból, illetve jelzőlámpás kereszteződésből áll, melyek csatlakozási pontjának a száma 30. Az 1-es pontból a 30-asba összesen 179 különböző

út vezet, melyeket egyszerű számítógépes programmal meg lehetett határozni. A 2. táblázatban megadjuk az egyes útszakaszokon, jelzőlámpás kereszteződéseken történő áthaladási idők várható értékeit és szórásait.

2. táblázat: A 10. ábra hálózatának élei és az azokon történő áthaladási idők várható értékei és szórásai percekben

Sorszám	Él kezdőpontja	Él végpontja	Várható érték	Szórás
1	1	2	30,000000	3,461726
2	1	3	25,000000	5,471535
3	1	4	20,000000	2,168257
4	1	5	2,000000	0,299822
5	1	6	20,000000	3,884469
6	1	7	25,000000	3,124388
7	1	8	30,000000	3,296793
8	2	9	13,000000	1,731340
9	2	13	21,000000	2,980834
10	3	9	15,000000	3,485528
11	3	10	15,000000	2,274798
12	4	10	9,000000	0,914267
13	5	6	5,000000	0,770245
14	5	10	8,000000	0,837407
15	5	17	30,000000	6,239424
16	6	7	7,000000	1,080475
17	6	11	6,000000	1,227885
18	7	8	9,000000	0,989020
19	7	18	25,000000	3,335587
20	7	19	35,000000	3,851452
21	8	12	10,000000	1,013420
22	9	13	12,000000	1,326969
23	9	14	1,000000	0,236068
24	10	15	8,000000	1,046940
25	10	16	3,000000	0,472285
26	11	18	7,000000	0,760670
27	12	20	6,000000	0,720107
28	13	21	15,000000	2,888734

2. táblázat: (folytatás)

Sorszám	Él kezdőpontja	Él végpontja	Várható érték	Szórás
29	14	15	8,000000	1,046825
30	14	21	10,000000	1,214190
31	15	16	6,000000	0,652598
32	15	22	9,000000	1,540980
33	16	22	7,000000	0,754185
34	17	18	5,000000	1,179303
35	17	23	17,000000	2,293428
36	18	19	5,000000	0,633427
37	18	23	2,000000	0,455095
38	19	24	12,000000	1,640020
39	19	27	21,000000	3,271450
40	20	24	8,000000	1,046203
41	21	25	12,000000	1,592453
42	22	25	13,000000	1,482183
43	22	26	12,000000	1,392733
44	23	26	12,000000	1,857025
45	23	27	8,000000	1,104477
46	24	27	6,000000	0,684509
47	25	26	12,000000	2,374292
48	25	28	8,000000	1,214510
49	26	28	9,000000	1,012544
50	26	29	12,000000	1,413315
51	27	29	15,000000	1,832685
52	28	29	9,000000	1,523341
53	28	30	12,000000	1,838438
54	29	30	8,000000	1,411934

A 2. táblázatban az élekre megadott várható áthaladási idők a 179 különböző útra is meghatározzák a várható áthaladási időket. Ezek 52 perctől 120 percig terjednek. Ez alapján is nyilvánvaló, hogy az 1-es pontból a 30-as pontba történő minél gyorsabb áthaladáshoz nem szükséges mind a 179 utat figyelembevenni. Hogy pontosabban ki tudjuk

választani, hogy mely utakat érdemes ebből a szempontból figyelembevenni, az éleken történő véletlen nagyságú áthaladási időket normális eloszlásúnak feltételeztük és egy 100000-es mintán összeszámoltuk, hogy melyik út hányszor bizonyult a leggyorsabbnak. Azt találtuk, hogy csak 12 olyan út van, amelyek a 100000 esetből legalább 10-szer bizonyult a leggyorsabban bejárhatónak. Ezeknek az átlagos áthaladási idő szerint növekvő sorrend szerinti sorszámait és az út–él incidencia mátrixukat a 3. táblázatban látható.

3. táblázat: A leggyorsabb utak út–él incidencia mátrixa

```

1: 00010000000001000000000010000000100000000100000010001
2: 000100000000010001000000001000000000100000001000001001
3: 000100000000010000000000100000001000000000100000100010
4: 000100000000010000000000100000001000000001000001000010
5: 000100000000010001000000001000000000100000010000010001
6: 000100000000010001000000001000000000100000010000100010
7: 000100000000010000000000100000001000000000100000100101
8: 000100000000010000000000100000001000000001000001000101
19: 000010000000000001000000001000000000100000001000001001
27: 000100000000001000000000000000000100100000001000001001
30: 000100000000001000000000000000000100100000010000010001
33: 000100000000001000000000000000000100100000010000100010

```

A 3. táblázatbeli utak véletlen áthaladási idői a centrális határeloszlás tétel szerint normális eloszlásúak, melyek között nemnegatív korrelációk lehetnek. Az együttes normális eloszlásuk komponenseinek a várható értékeit és a szórásait a 4. táblázat; a korrelációs együtthatóit pedig az 5. táblázat tartalmazza.

4. táblázat: A 3. táblázatbeli utak véletlen hosszainak várható értékei és szórásai

Várható érték:	52	53	53	53	54	55	58	58	66	70	71	72
Szórás:	2,74	3,09	2,82	2,94	3,23	3,29	2,98	3,09	4,89	6,87	6,93	6,96

5. táblázat: A 3. táblázatbeli utak véletlen hosszainak korreláció mátrixa

1,00	0,25	0,46	0,20	0,46	0,01	0,68	0,42	0,15	0,11	0,22	0,01
0,25	1,00	0,01	0,01	0,50	0,30	0,23	0,22	0,59	0,32	0,11	0,01
0,46	0,01	1,00	0,60	0,01	0,49	0,54	0,18	0,00	0,01	0,01	0,23
0,20	0,01	0,60	1,00	0,01	0,36	0,18	0,58	0,00	0,00	0,00	0,17
0,46	0,50	0,01	0,01	1,00	0,61	0,22	0,21	0,27	0,10	0,35	0,17
0,01	0,30	0,49	0,36	0,61	1,00	0,11	0,01	0,14	0,01	0,16	0,36
0,68	0,23	0,54	0,18	0,22	0,11	1,00	0,64	0,14	0,10	0,10	0,05
0,42	0,22	0,18	0,58	0,21	0,01	0,64	1,00	0,13	0,10	0,10	0,00
0,15	0,59	0,00	0,00	0,27	0,14	0,14	0,13	1,00	0,20	0,07	0,01
0,11	0,32	0,01	0,00	0,10	0,01	0,10	0,10	0,20	1,00	0,90	0,85
0,22	0,11	0,01	0,00	0,35	0,16	0,10	0,10	0,07	0,90	1,00	0,91
0,01	0,01	0,23	0,17	0,17	0,36	0,05	0,00	0,01	0,85	0,91	1,00

A 6. táblázatban megadjuk a $P(T(\xi) > t)$ valószínűségekre számított Boole–Bonferroni alsó korlátokat a t paraméter 45-től 52-ig terjedő értékeire, valamint az azok számításához szükséges S_1, S_2, S_3 binomiális momentum értékeket. A táblázat $t = 47$ sora például azt jelenti, hogy annak a valószínűsége, hogy 47 percnél rövidebb idő alatt nem lehet az 1-es pontból a 30-asba eljutni, legalább 0,90.

6. táblázat: Boole-Bonferroni alsó korlátok annak a valószínűségére, hogy t -nél rövidebb idő alatt nem lehet az 1-es pontból a 30-asba jutni

t	S_1	S_2	S_3	Boole–Bonferroni alsó korlát
45	0,20E-01	0,20E-02	0,19E-03	0,982
46	0,51E-01	0,77E-02	0,10E-02	0,955
47	0,12E+00	0,27E-01	0,52E-02	0,901
48	0,26E+00	0,86E-01	0,23E-01	0,805
49	0,50E+00	0,24E+00	0,87E-01	0,656
50	0,88E+00	0,59E+00	0,28E+00	0,467
51	0,14E+01	0,13E+01	0,80E+00	0,250
52	0,21E+01	0,25E+01	0,19E+01	0,054

2. Csoportos életbiztosítás

Ebben a fejezetben a Bowers (1997) könyv fogalmait és jelöléseit használjuk. Egy adott egyén teljes élettartama valószínűségi változó, melyet a továbbiakban X , vagy (esetleg indexszel ellátott) más latin nagybetűvel jelölünk. Ha az egyén túlélte az x évet, akkor a hátralévő élettartamát a $T(x)$ szimbólum jelöli. A $T(x)$ valószínűségi változó eloszlása az $X \geq 0$ valószínűségi változó feltételes valószínűségeloszlásával adható meg. Ha X eloszlásfüggvényére bevezetjük az $F(x)$ jelölést, vagyis

$$F(x) = P(X \leq x), \quad x \geq 0, \quad (2.1)$$

továbbá bevezetjük még az

$$s(x) = 1 - F(x) \quad (2.2)$$

jelölést is, akkor $T(x)$ eloszlása az alábbi képlettel adható meg:

$$\begin{aligned} P(T(x) \leq t) &= P(x < X \leq x + t | X > x) = \frac{P(x < X \leq x + t)}{P(X > x)} \\ &= \frac{F(x+t) - F(x)}{s(x)} = \frac{s(x) - s(x+t)}{s(x)}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

A (2.3) valószínűségekre szokás a ${}_tq_x$ jelölést, a $P(T(x) > t)$ valószínűségekre pedig a ${}_tp_x$ jelölést alkalmazni. Az élettartamokat általában diszkrét, vagy folytonos eloszlású valószínűségi változóknak szokás feltételezni. A diszkrét esetben az élettartam lehet $0, 1, 2, \dots$ év, vagy valamilyen rövidebb időtartam. A ${}_tq_x$ valószínűségeket egész x, t esetre az élettartam táblázatok tartalmazzák. Az egy évre vonatkozó túlélési ill. halálozási valószínűségekre vonatkozólag szokás az alábbi, egyszerűbb jelöléseket alkalmazni:

$$p_x = {}_1p_x, \quad q_x = {}_1q_x, \quad \text{ha } t = 1.$$

A ${}_tp_x$ valószínűség számítható a $t = 1$ esetre vonatkozó valószínűségek segítségével, ugyanis fennáll az alábbi egyenlőség:

$$\begin{aligned}
{}_t p_x &= P(X > x + t | X > x) = \frac{P(X > x + t)}{P(X > x)} \\
&= \prod_{k=1}^t \frac{P(X > x + k)}{P(X > x + k - 1)} = p_x p_{x+1} \cdots p_{x+t-1}.
\end{aligned}
\tag{2.4}$$

Tekintsünk most n egyént, akik az adott időpontban x_1, \dots, x_n évet már éltek, ahol x_1, \dots, x_n nem feltétlenül egész számok. Másként kifejezve, tekintsük az $(x_1), \dots, (x_n)$ élettartamokat. Az idő haladtával a még életben lévő egyének száma csökken. Azt mondjuk, hogy a legalább k túlélő állapot érvényes, ha k egyén az n közül még életben van. A legalább k túlélő állapot jele:

$$\binom{k}{x_1 x_2 \dots x_n}.$$

Egy másik rokon fogalom a pontosan k túlélő állapot. Ez fennáll akkor, ha az n élet közül pontosan k még nem fejeződött be. Ennek az állapotnak a jele:

$$\binom{[k]}{x_1 x_2 \dots x_n}.$$

A jelen időponthoz képest t idő múlva a legalább k túlélő állapot bekövetkezésének a valószínűségét a

$${}_t p_{\frac{k}{x_1 x_2 \dots x_n}},$$

a pontosan k túlélő állapot bekövetkezésének a valószínűségét a

$${}_t p_{\frac{[k]}{x_1 x_2 \dots x_n}}$$

szimbólum jelöli.

Ismeretes, hogy ha A_1, \dots, A_n tetszőleges események, $P_{[k]}$ annak a valószínűsége, hogy ezek közül pontosan k esemény bekövetkezik, ahol $0 \leq k \leq n$, akkor tetszőleges c_0, c_1, \dots, c_n számokkal fennáll a

$$\sum_{k=0}^n c_k P_{[k]} = c_0 + \sum_{k=1}^n S_k \Delta^k c_0, \tag{2.5}$$

egyenlőség. A (2.5) képletben $S_0 = 1$,

$$S_k = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}), \quad k = 1, \dots, n,$$

$\Delta^k c_0$ pedig a c_0, c_1, \dots, c_n sorozat k -adik differenciája,

$$\Delta^0 c_0 = c_0, \quad \Delta^1 c_0 = c_1 - c_0, \quad \Delta^2 c_0 = c_2 - 2c_1 + c_0$$

és általában

$$\Delta^k c_0 = \sum_{i=0}^k (-1)^{i-1} \binom{k}{i} c_i, \quad k = 1, \dots, n. \quad (2.6)$$

Hasonló képlet adható arra az esetre, amikor a $P_{(k)}$ valószínűséget a legalább k esemény bekövetkezésének P_k valószínűségével helyettesítjük. Az erre az esetre vonatkozó képletben a d_0, d_1, \dots, d_n számokat alkalmazva, fennáll a

$$\sum_{k=0}^n d_k P_k = d_0 + \sum_{k=1}^n S_k \Delta^{k-1} d_1 \quad (2.7)$$

egyenlőség.

Tekintsük most ismét a $T(x_1), \dots, T(x_n)$ valószínűségi változókat, melyek az x_1, \dots, x_n éves egyedek további élettartamait jelölik. Vezessük be a következő jelöléseket:

$${}_t S_k = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} P(T(x_{i_1}) > t, \dots, T(x_{i_k}) > t), \quad k = 1, \dots, n.$$

Ha ezeket a (2.5) és a (2.7) képletekben megfelelő S_k mennyiségek helyébe tesszük és egyidejűleg végrehajtjuk a

$$P_{[k]} = {}_t p_{x_1 x_2 \dots x_n}^{[k]}$$

$$P_k = {}_t p_{x_1 x_2 \dots x_n}^k$$

helyettesítéseket, akkor az alábbi formulákhoz jutunk:

$$\sum_{k=0}^n c_k {}_tP_{x_1 x_2 \dots x_n}^{[k]} = c_0 + \sum_{k=1}^n {}_tS_k \Delta^k c_0 \quad (2.8)$$

$$\sum_{k=0}^n c_k {}_tP_{x_1 x_2 \dots x_n}^k = d_0 + \sum_{k=1}^n {}_tS_k \Delta^{k-1} d_1. \quad (2.9)$$

Az aktuárius elméletben és gyakorlatban a $T(x_1), \dots, T(x_n)$ valószínűségi változókat általában függetleneknek tételezik fel. E feltétel érvényessége esetén fennáll az, hogy

$$P(T(x_{i_1}) > t_1, \dots, T(x_{i_k}) > t) = P(T(x_{i_1}) > t) \dots P(T(x_{i_k}) > t)$$

és így a ${}_tS_k$ értékeket a $T(x_i)$ valószínűségi változók eloszlásai ismeretében meghatározhatjuk. A (2.8), (2.9) egyenlőségek jobb oldalának ismeretében a bal oldalak is ismertté válnak. Az utóbbiaknak konkrét biztosításmatematikai tartalmuk van, amint ezt a következő szakaszban kifejtjük.

Ha azonban a $T(x_1), \dots, T(x_n)$ valószínűségi változók nem függetlenek, akkor már nem biztos, hogy a ${}_tS_1, \dots, {}_tS_n$ mennyiségek mind ismertek, lehet, hogy csak az első kettő, vagy az első három, vagy az első néhány mennyiség ismert, a többi nem. Ez két okból is bekövetkezhet. Egyfelől lehet, hogy néhány valószínűségi változó együttes eloszlására van adatunk, de sokra nincs, másfelől lehet, hogy vannak adatok, de valamennyi ${}_tS_1 \dots {}_tS_n$ kiszámításához szükséges számítási idő irreálisan sok volna. Ily módon a (2.8), (2.9) formulák alkalmazási lehetősége korlátozott.

A 2.1. szakaszban a (2.8), (2.9) egyenletek bal oldalán álló mennyiségek biztosításmatematikai jelentésével foglalkozunk. Az ezt követő 2.2. szakaszban megadjuk a (2.8), (2.9) formulák bal oldalain álló összegekben szereplő valószínűségek általunk javasolt alsó és felső korlátait, melyek révén eljutunk az összegek alsó és felső korlátaihoz. Végül a 2.3. szakaszban az $m + 1 = 3$ esetre vonatkozó formulákat adjuk meg.

2.1. Az élettartamok együttes valószínűségeloszlásának jelentősége az életbiztosítási feladatokban

A nagy számú alkalmazási lehetőség közül kettőt ragadunk ki. Az egyik a több személy együttes életbiztosítása esetén a nettó prémium, a másik a több személyes évjáradék (annuitás) meghatározása. Az együttes életbiztosítás vonatkozásában felmerülő problémák közül vegyük az alábbi példát.

2.1. Példa: *Tegyük fel, hogy n személy számára kötünk életbiztosítást, mely a j -edik elhalálozás után a következő elhalálozásig d_j összeget fizet, ahol $j = 0, 1, \dots, n$. Az életbiztosítás megkötésének idejét zérónak véve, a biztosított egyének ekkor bizonyos életkort már elérték, jelöljük ezeket x_1, \dots, x_n . A jövőben bekövetkező elhalálozások időpontjait a korábban bevezetett jelöléseknek megfelelően a $T(x_1), \dots, T(x_n)$ valószínűségi változók értékei adják meg. Együttes eloszlásuk a teljes x_1, \dots, x_n élettartamok $F(z_1, \dots, z_n)$ együttes eloszlásfüggvénye segítségével határozható meg.*

Például, a $T(x_1) > t_1, \dots, T(x_n) > t_n$ esemény valószínűsége a következő:

$$\begin{aligned}
 & P(T(x_1) > t_1, \dots, T(x_n) > t_n) \\
 &= P(X_1 > x_1 + t_1, \dots, X_n > x_n + t_n | X_1 > x_1, \dots, X_n > x_n) \\
 &= \frac{P(X_1 > x_1 + t_1, \dots, X_n > x_n + t_n, X_1 > x_1, \dots, X_n > x_n)}{P(X_1 > x_1, \dots, X_n > x_n)} \\
 &= \frac{P(X_1 > x_1 + t_1, \dots, X_n > x_n + t_n)}{P(X_1 > x_1, \dots, X_n > x_n)}.
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

A (2.10) képlet utolsó sorában mind a számláló, mind a nevező jól ismert módon származtatható az X_1, \dots, X_n valószínűségi változó együttes eloszlásfüggvénye segítségével. Egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy X_1, \dots, X_n együttes eloszlása folytonos. Rendezzük sorba nagyság szerint a $T(x_1), \dots, T(x_n)$ valószínűségi változókat, jelöljük ezeket T_1^*, \dots, T_n^* ahol T_1^* a legkisebb, T_n^* a legnagyobb érték. Jelölje $f_j(t)$ a T_j^* valószínűségi

változó sűrűségfüggvényét, $j = 1, \dots, n$. E sűrűségfüggvények is származtathatók az $F(z_1, \dots, z_n)$ eloszlásfüggvényből. Ezek után felírjuk a nettó prémium értékét:

$$\int_0^{\infty} e^{-rt} \sum_{j=1}^n d_j f_j(t) dt, \quad (2.11)$$

ahol r a kamatláb és e^{-rt} a jelenérték meghatározásához szolgáló diszkontáló faktor (időben folytonos kamatozást feltételezve). Ha az X_1, \dots, X_n valószínűségi változók függetlenek, folytonos és azonos eloszlásúak, közös sűrűségfüggvényük $f(t)$, továbbá $x_1 = \dots = x_n = 0$, akkor

$$f_j(t) = \frac{n!}{(j-1)!(n-j)!} (F(t))^{j-1} (1-F(t))^{n-j} f(t), \quad j = 1, \dots, n.$$

Ezekkel a függvényekkel (2.11) értéke meghatározható.

2.2. Példa: Évjáradék (annuitás). Tegyük fel, hogy n személy számára folyósítandó évjáradék összege időegységenként c_j forint a j -edik és a $j+1$ -edik személy halála között, $j = 0, 1, \dots, n$. Meghatározható az évjáradék jelenértéke időben folytonos kamatozás esetén, ahol a kamatláb r . Az egyes személyek élettartama induláskor az x_1, \dots, x_n értékekkel egyenlő. A feladat megoldására a (2.8) formulát alkalmazhatjuk. Ekkor azonban ismernünk kell minden $t \geq 0$ esetén a ${}_tS_k$, $k = 1, \dots, n$ értéket. Tegyük fel, hogy ezek rendelkezésre állnak. Ekkor a kívánt eredményhez a (2.8) egyenlőség mindkét oldalának 0 -tól ∞ -ig terjedő integrálása révén jutunk. Ugyanis annak a valószínűsége, hogy a t időpontban a rendszer a pontosan k túlélő állapotban legyen, a

$${}_tP_{x_1 x_2 \dots x_n}^{[k]}$$

értékkel egyenlő. Ebből következik, hogy a $(t, t+dt)$ időintervallumban kifizetett évjáradék várható értéke

$$e^{-rt} \sum_{k=0}^n c_k {}_tP_{x_1 x_2 \dots x_n}^{[k]} dt \quad (2.12)$$

és így a teljes $(0, \infty)$ időintervallumban kifizetett évjáradék várható értéke, vagyis az un . aktuárius jelenérték az alábbi:

$$\sum_{k=0}^n c_k \int_0^{\infty} e^{-rt} {}_tP_{x_1 \dots x_n}^{[k]} dt = c_0 \int_0^{\infty} e^{-rt} dt + \sum_{k=1}^n \Delta^k c_0 \int_0^{\infty} {}_tS_k dt. \quad (2.13)$$

Ha az egyes élettartamok független valószínűségi változók, akkor ehhez ${}_tS_k$, $k = 1, \dots, n$ meghatározhatók az egyedek élettartama valószínűségeloszlása és a c_0, \dots, c_n sorozat ismeretében.

2.2. Alsó és felső korlátok az aktuárius jelenértékre vonatkozólag

A (2.13) egyenletben szereplő ${}_tS_k$ értékek ismerete minden $t \geq 0$ és $k = 1, \dots, n$ esetén feltételezi az n személy élettartama együttes valószínűségeloszlásának az ismeretét. Ez azonban a gyakorlatban általában nem áll rendelkezésre. Sok esetben mégis kevesebb, mint n élettartam együttes eloszlása rendelkezésre áll. A legegyszerűbb eset az, amikor minden élettartam pár együttes valószínűségeloszlását ismerjük. Ebben a szakaszban erre a viszonylag egyszerű esetre koncentrálnunk és módszert adunk az évjáradék aktuárius jelenérték alsó és felső korlátjainak a meghatározására, kizárólag a páros élettartam eloszlások ismeretének feltételezése mellett. A módszer sok hasonlóságot mutat a Horváth és Prékopa (2002) dolgozatban közölt módszerhez, mely azt a célt szolgálja, hogy rendszerek átlagos működési idejére határozzunk meg korlátokat. Mielőtt azonban tovább mennénk, figyelmünket egy speciális c_0, c_1, \dots, c_n sorozatra irányítjuk, mely gyakran előfordul az évjáradék számításban. Ez a sorozat a következő:

$$c_0 = 0, \quad c_1 = c^{n-1}, \quad c_2 = c^{n-2}, \dots, c_n = 1, \quad (2.14)$$

ahol $0 < c < 1$. Mivel c_k az évjáradék időegységre eső részét jelenti a pontosan k túlélő állapot érvényessége esetén, a fenti sorozat azt jelenti, hogy egy egység jár, ha mindegyik kedvezményezett életben van és minden halál esetén az évjáradék c szorzóval csökken. A (2.14) sorozattal kapcsolatban bebizonyítunk két tételt. Ehhez szükségünk van a magasabb rendű osztott differencia fogalmára, mely megtalálható pl. Jordan (1947), vagy Prékopa (1995), könyvében.

2.1. Tétel: *A (2.14) képlettel adott c_0, c_1, \dots, c_n sorozat valamennyi $m+1$ -rendű osztott differenciája pozitív, ha $m+1$ páratlan.*

Bizonyítás: A Fekete és Pólya (1912) levelezésében szereplő Fekete által bizonyított egyik tétel és az osztott differenciák determináns alakja segítségével bebizonyítható, hogy ha a konsekutív pontokhoz tartozó $m+1$ -rendű differenciák pozitívak, akkor valamennyi $m+1$ -rendű osztott differencia pozitív. Ennek indoklása megtalálható Prékopa (1995) könyve 156. oldalán, így a részleteket mellőzzük.

Tekintsük a $c_i, c_{i+1}, \dots, c_{i+m+1}$ számokat. Mivel ezek az $i, i+1, \dots, i+m+1$ számokhoz tartoznak, az osztott differencia pozitivitásához elegendő a közönséges $\Delta^{m+1}c_i$ differencia pozitivitását belátni. Ismeretes, hogy

$$\Delta^{m+1}c_i = \sum_{k=0}^{m+1} (-1)^{k-1} \binom{m+1}{k} c_{i+k}.$$

Mivel $c_0 = 0$, $c_k = c^{n-k}$, $k = 1, \dots, n$, az $i > 0$ esetben azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \Delta^{m+1}c_i &= \sum_{k=0}^{m+1} (-1)^{k-1} \binom{m+1}{k} c^{n-i-k} \\ &= -c^{n-i} \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} \left(\frac{-1}{c}\right)^k \\ &= -c^{n-i} \left(1 - \frac{1}{c}\right)^{m+1} = (-1)^m c^{n-i} \left(1 - \frac{1}{c}\right)^{m+1} > 0. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Ha viszont $i = 0$, akkor

$$\begin{aligned} \Delta^{m+1}c_i &= \sum_{k=0}^{m+1} (-1)^{k-1} \binom{m+1}{k} c_k \\ &= \sum_{k=1}^{m+1} (-1)^{k-1} \binom{m+1}{k} c^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{m+1} (-1)^{k-1} \binom{m+1}{k} c^{n-k} + c^n \\ &= -c^n \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} \left(\frac{-1}{c}\right)^k + c^n \\ &= c^n \left[1 - \left(1 - \frac{1}{c}\right)^{m+1}\right] = c^n \left[1 + (-1)^m \left(\frac{1-c}{c}\right)^{m+1}\right] > 0. \end{aligned} \tag{2.16}$$

□

2.2. Tétel: Ha $c < \frac{1}{2}$, és $m+1$ páros, akkor a c_0, c_1, \dots, c_n sorozat valamennyi $m+1$ -rendű osztott differenciája negatív.

Bizonyítás: Ha $i > 0$, akkor a (2.15) reláció utolsó sorából leolvasható, hogy $\Delta^{m+1}c_i < 0$. Ha viszont $i = 0$, akkor a (2.16) és az $(1 - c)/c > 1$ relációból következik, hogy

$$\Delta^{m+1}c_i = c^n \left[1 - \left(\frac{1-c}{c} \right)^{m+1} \right] < 0. \quad (2.17)$$

□

Megjegyzés: Ha $c > \frac{1}{2}$, akkor az $i > 0$ esetben $\Delta^{m+1}c_i$ pozitív, illetve negatív, aszerint, hogy $m + 1$ páratlan, vagy páros. Az $i = 0$ esetében azonban $\Delta^{m+1}c_i > 0$, függetlenül attól, hogy $m + 1$ páratlan, vagy páros.

A továbbiakban ismertetjük módszerünket, melyre támaszkodva alsó és felső korlátot adunk a (2.13) képlet bal oldalán álló mennyiségre. Ehhez előbb korlátokat adunk a

$$\sum_{k=0}^n c_{kt} P_{\frac{[k]}{x_1 x_2 \dots x_n}} \quad (2.18)$$

összegre, rögzített t esetén. A kívánt korlátokat az e^{-rt} -vel való szorzás, majd integrálás után kapjuk. Tegyük fel, hogy $m+1$ páratlan és ismeretesek az 1. szakaszban értelmezett ${}_tS_k$, $k = 1, \dots, m$ mennyiségek. Tudjuk azt, hogy ha A_{tj} jelenti a $T(x_j) > t$ eseményt, $j = 1, \dots, n$, továbbá γ_t rögzített t esetén azoknak az A_{tj} eseményeknek a száma, amelyek bekövetkeznek, akkor

$$E \left[\binom{\gamma_t}{k} \right] = {}_tS_k, \quad k = 0, \dots, n. \quad (2.19)$$

A (2.19) formula érvényességét illetően l. Prékopa (1995)könyvében a 6.2 szakaszt. A (2.19) egyenlőségből következik, hogy

$$\sum_{i=0}^n \binom{i}{k} {}_tP_{\frac{[i]}{x_1 x_2 \dots x_n}} = {}_tS_k, \quad k = 0, 1, \dots, n, \quad (2.20)$$

ahol ${}_tS_0 = 1$ definíció szerint.

A (2.20) egyenlőségek száma $n + 1$, ugyanennyi a bal oldalon álló összegben szereplő valószínűségek száma is. A ${}_tS_k$, $k = 0, 1, \dots, n$ és a ${}_tP_{\frac{[i]}{x_1 x_2 \dots x_n}}$, $i=0,1, \dots, n$ mennyiségek egyértelműen meghatározzák egymást. Ha azonban a (2.20) egyenlőségeket csak a $k =$

$0, 1, \dots, m$ esetekre írjuk fel, ahol $m < n$, akkor a ${}_t S_k$, $k = 0, 1, \dots, m$ mennyiségek, melyeket feltevésünk szerint ismerünk, már nem határozzák meg egyértelműen a ${}_t p_{x_1 x_2 \dots x_n}^{[i]}$, $i = 0, 1, \dots, n$ valószínűségeket. Ezért az utóbbiakat változóknak tekintjük és az adott egyenlőségek és a változókra tett nemnegativitási feltételek mellett minimalizáljuk, ill. maximalizáljuk azt a célfüggvényt, amelyet (2.18) határoz meg, ha ott is változóknak tekintjük a valószínűségeket. A jelölés egyszerűsítése érdekében a változóknak tekintett ${}_t p_{x_1 x_2 \dots x_n}^{[i]}$ valószínűségek helyett a továbbiakban a v_{ti} szimbólumokat alkalmazzuk. Így módon a (2.18) értékre vonatkozó alsó és felső becsléseket az alábbi lineáris programozási feladat optimum értékei szolgáltatják:

$$\begin{aligned} & \min(\max) \sum_{i=0}^n c_i v_{ti} \\ & \text{feltéve, hogy} \\ & \sum_{i=0}^n \binom{i}{k} v_{ti} = {}_t S_k, k = 0, 1, \dots, m \\ & v_{ti} \geq 0, i = 0, 1, \dots, n. \end{aligned} \tag{2.21}$$

A (2.21) feladat helyett egy valamivel kényelmesebb alakú feladatot írhatunk fel, ha a ${}_t S_k$, $k = 0, 1, \dots, m$ ún. binomiális momentumok helyett áttérünk a ${}_t \mu_k$, $k = 0, 1, \dots, m$ hatványmomentumokra. A (2.21) feladat egyenlőséges feltételeinek ekvivalens alakja a következő

$$\sum_{i=0}^n i^k v_{ti} = {}_t \mu_k, k = 0, 1, \dots, m, \tag{2.22}$$

ahol $0^0 = 1$, definíció szerint, és

$${}_t \mu_k = \sum_{j=0}^k S(k, j) j! {}_t S_j, k = 0, 1, \dots, m. \tag{2.23}$$

Az $S(k, j)$ számok az ún. Stirling számok. Ezek értelmezését illetően l. Prékopa (1995, 154.o.) A (2.23) egyenlőségek kis k értékekre könnyen megadhatók a (2.19) formula alapján, ugyanis minden k esetén fennáll az

$$E(\nu_t^k) = {}_t \mu_k$$

egyenlőség. Így pl.

$$\begin{aligned} {}_t\mu_1 &= {}_tS_1 \\ {}_t\mu_2 &= 2{}_tS_2 + {}_tS_1 \\ {}_t\mu_3 &= 6{}_tS_3 + 6{}_tS_2 + {}_tS_1. \end{aligned}$$

A fentiek alapján felírhatjuk a (2.21) feladatokhoz ekvivalens alábbi feladatokat.

$$\begin{aligned} \min(\max) \sum_{i=0}^n c_i v_{ti} \\ \text{feltéve, hogy} \\ \sum_{i=0}^n i^k v_{ti} = {}_t\mu_k, \quad k = 0, 1, \dots, m. \end{aligned} \tag{2.24}$$

A (2.24) feladat tömörebb alakja a következő:

$$\begin{aligned} \min(\max) \sum_{i=0}^n c_i v_{ti} \\ \text{feltéve, hogy} \\ \sum_{i=0}^n a_i v_{ti} = {}_t\mu, \\ v_{ti} \geq 0, \quad i = 0, 1, \dots, n, \end{aligned} \tag{2.25}$$

ahol

$$a_i = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ i^2 \\ \vdots \\ i^m \end{pmatrix}, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

$${}_t\mu = \begin{pmatrix} 1 \\ {}_t\mu_1 \\ {}_t\mu_2 \\ \vdots \\ {}_t\mu_m \end{pmatrix}.$$

A (2.25) feladatra érényes a következő tétel.

2.3. Tétel: *Ha a (3.1) által adott c_0, c_1, \dots , sorozatban, $0 < c < 1$ és $m + 1$ páratlan, akkor a (2.25) feladat duál megengedett bázisai, a bázisindexekkel kifejezve, az alábbi sémát követik:*

$$\begin{aligned} \min \text{ feladat} & \quad 0, i, i + 1, \dots, h, h + 1 \\ \max \text{ feladat} & \quad j, j + 1, \dots, h, h + 1, n. \end{aligned}$$

Bizonyítás: A tétel a 2.1, 2.2 tételek és Prékopa (1990, 1995, 159.old) diszkrét momentum problémára vonatkozó duál megengedett bázis struktúra tételéből következik. Itt felhasználást nyer a c_0, c_1, \dots, c_n sorozat osztott differenciáinak pozitivitása.

□

2.4. Tétel: *Ha $c < \frac{1}{2}$ és $m + 1$ páros, akkor a (2.25) feladat duál megengedett bázisai a bázisindexekkel kifejezve, az alábbi sémát követik:*

$$\begin{aligned} \min \text{ feladat} & \quad 0, j, j + 1, \dots, h, h + 1, n \\ \max \text{ feladat} & \quad i, i + 1, \dots, h, h + 1. \end{aligned}$$

Bizonyítás: A tétel érvényessége a 2.2 tételhez hasonlóan igazolható.

□

Az $m = 2$ esetre vonatkozólag a 2.24 feladat alakja a következő:

$$\begin{aligned} \min(\max) \sum_{i=0}^n c_i v_{ti} \\ \text{feltéve, hogy} \end{aligned}$$

$$v_{t0} + v_{t1} + v_{t2} + \dots + v_{tn} = 1 \tag{2.26}$$

$$v_{t1} + 2v_{t2} + \dots + nv_{tn} = {}_t\mu_1$$

$$v_{t1} + 4v_{t2} + \dots + n^2v_{tn} = {}_t\mu_2$$

$$v_{ti} \geq 0, \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

ahol ${}_t\mu_1$ és ${}_t\mu_2$ a korábban megadott képletek szerint határozhatók meg ${}_tS_1$ és ${}_tS_2$ ismeretében.

A 2.3 tétel szerint a (2.26) feladat duál megengedett bázisai az alábbi típusúak:

$$\text{min feladat} \quad 0, i, i + 1$$

$$\text{max feladat} \quad j, j + 1, n.$$

Az $m=3$ esetben a (2.24) feladat alakja a következő:

$$\min(\max) \sum_{i=0}^n c_i v_{ti}$$

feltéve, hogy

$$v_{t0} + v_{t1} + v_{t2} + \dots + v_{tn} = 1 \quad (2.27)$$

$$v_{t1} + 2v_{t2} + \dots + nv_{tn} = {}_t\mu_1$$

$$v_{t1} + 4v_{t2} + \dots + n^2v_{tn} = {}_t\mu_2$$

$$v_{t1} + 8v_{t2} + \dots + n^3v_{tn} = {}_t\mu_3$$

$$v_{ti} \geq 0, \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

ahol a ${}_t\mu_1, {}_t\mu_2, {}_t\mu_3$ hatványmomentumok, a ${}_tS_1, {}_tS_2, {}_tS_3$ binomiális momentumok ismeretében meghatározhatók.

A 2.4 tétel szerint a (2.27) feladat duál megengedett bázisai az alábbi típusúak:

$$\text{min feladat} \quad 0, j, j + 1, n$$

$$\text{max feladat} \quad i, i + 1, j, j + 1.$$

Ha a (2.25) feladat minimum és maximum értékeit L_t és U_t jelentik, akkor fennáll az alábbi reláció.

$$L_t \leq \sum_{i=0}^n c_i t p_{x_1 x_2 \dots x_n}^{[i]} \leq U_t$$

a (2.13) egyenlőség felső sorában álló un. aktuárius jelenértékre pedig az alábbi alsó és felső korlátokat kapjuk:

$$\int_0^{\infty} e^{-rt} L_t dt \leq \sum_{i=0}^n c_i \int_0^{\infty} e^{-rt} t p_{x_1 x_2 \dots x_n}^{[i]} dt \leq \int_0^{\infty} e^{-rt} U_t dt. \quad (2.28)$$

A korlátok numerikus meghatározása oly módon történik, hogy minden t esetén meghatározzuk azt a bázist, mely primal megengedett is, felírjuk az L_t , ill. az U_t optimum értéket és elvégezzük az integrálást arra az intervallumra, amelyben az adott bázisra a primál megengedettséggé fennáll.

2.3. Az $m+1=3$ esetre vonatkozó formulák

A (2.16) probléma az un. diszkrét momentumprobléma, rögzített t esetén. E feladatban a valószínűségeloszlás tartója a $0, 1, \dots, n$ halmaz, a célfüggvényben pedig a $c_0 = 0$, $c_i = c^{n-i}$, $i = 1, \dots, n$ együtthatók szerepelnek.

Ha az eloszlás tartója a $\{z_0, z_1, \dots, z_n\}$ halmaz, a célfüggvény együtthatók pedig az $f(z_0), f(z_1), \dots, f(z_n)$ számok, akkor a feladat optimum értékei, vagyis a célfüggvény alsó és felső korlátjai az alábbi egyenlőtlenségek formájában oldhatók meg: (1. Prékopa 1995, 171 old.)

$$\begin{aligned} & \frac{z_i z_{i+1} - (z_i + z_{i+1})\mu_1 + \mu_2}{(z_i - z_0)(z_{i+1} - z_0)} f(z_0) - \frac{z_0 z_{i+1} - (z_0 z_{i+1} - (z_0 + z_{i+1})\mu_1 + \mu_2)}{(z_{i+1} - z_i)(z_i - z_0)} f(z_i) \\ & + \frac{z_0 z_i - (z_0 + z_i)\mu_1 + \mu_2}{(z_{i+1} - z_i)(z_{i+1} - z_0)} f(z_{i+1}) \leq E[f(\xi)] \leq \frac{z_{j+1} z_n - (z_{j+1} + z_n)\mu_1 + \mu_2}{(z_{j+1} - z_j)(z_n - z_j)} f(z_j) \\ & - \frac{z_j z_n - (z_j + z_n)\mu_1 + \mu_2}{(z_{j+1} - z_j)(z_n - z_{j+1})} f(z_{j+1}) + \frac{z_j z_{j+1} - (z_j + z_{j+1})\mu_1 + \mu_2}{(z_n - z_{j+1})(z_n - z_j)} f(z_n), \end{aligned} \quad (2.29)$$

ahol i és j az alábbi egyenlőtlenségek révén határozhatók meg:

$$z_i \leq \frac{\mu_2 - z_0 \mu_1}{\mu_1 - z_0} \leq z_{i+1} \quad (2.30)$$

$$z_j \leq \frac{z_n \mu_1 - \mu_2}{z_n - \mu_1} \leq z_{j+1}. \quad (2.31)$$

Ha ezt a mi esetünkre specializáljuk, akkor a következő adódik

$$\begin{aligned} & \frac{{}^{(i+1)}t\mu_1 - {}_i t\mu_2}{i} c^{n-i} - \frac{{}_i t\mu_1 - {}_{i+1} t\mu_2}{i+1} c^{n-i-1} \leq \sum_{l=1}^n c^{n-l} {}_t p_{x_1 x_2 \dots x_n}^{[l]} \\ & \leq \frac{(j+1)n - (n+j+1) {}_i t\mu_1 + {}_i t\mu_2}{n-j} c^{n-j} - \frac{jn - (n+j) {}_i t\mu_1 + {}_i t\mu_2}{(n-j-1)} c^{n-j-1} + \frac{j(j+1) - (2j+1) {}_i t\mu_1 - {}_i t\mu_2}{(n-j-1)(n-j)}, \end{aligned} \quad (2.32)$$

ahol az i számot az

$$i {}_i t\mu_1 \leq {}_i t\mu_2 \leq (i+1) {}_i t\mu_1, \quad (2.33)$$

a j számot pedig a

$$j(n - {}_i t\mu_1) \leq n {}_i t\mu_1 - {}_i t\mu_2 \leq (j+1)(n - {}_i t\mu_1) \quad (2.34)$$

egyenlőtlenségéből határozzuk meg.

Tegyük fel, hogy a ${}_t\mu_1$ és a ${}_t\mu_2$ momentumok semmilyen $t > 0$ esetén nem egyenlők. Ha két momentum egyenlő, akkor az eloszlás a $\{0, 1\}$ értékre koncentrálódik. Ezt az esetet tehát kizárjuk. Ekkor azonban a (2.33) által meghatározott $i \neq 0$, ugyanis $i = 0$ esetén azt kapnánk, hogy ${}_t\mu_2 \leq {}_t\mu_1$, viszont tudjuk azt, hogy ${}_t\mu_2 \geq {}_t\mu_1$, tehát ${}_t\mu_2 = {}_t\mu_1$ következne.

A (2.34) egyenlőtlenségből azonban következhet, hogy $j = 0$. Ha ez fennáll akkor a (2.32) egyenlőtlenségben c^{n-j} helyett 0 irandó.

Jelölje I_i a t értékeknek azt az intervallumát, amelyet a (2.33) egyenlőtlenségek rögzített i esetén meghatároznak. Hasonlóan értelmezzük (2.34) alapján a J_j intervallumot. Ha a (2.30) egyenlőtlenségben mindenütt szorzunk az e^{-rt} faktorial, majd a bal oldalon integrálunk az I_i , a jobb oldalon pedig a J_j intervallumon, végül elvégezzük az $i - re$ ($i = 1, \dots, n$) és a $j - re$ ($j = 0, 1, \dots, n$) vonatkozó összegezést, akkor a kapott összegek alsó, illetve felső korlátai lesznek az évjáradék aktuárius jelenértékének, vagyis a

$$\sum_{l=1}^n c^{n-l} \int_0^{\infty} e^{-rt} {}_t p_{\frac{[l]}{x_1 x_2 \dots x_n}} dt$$

értéknek. A formulák felírásától, azok bonyolultsága miatt, eltekintünk. A módszer numerikus vizsgálata is további feladat lehet.

3. Együttes eloszlás konstrukciója adott egydimenziós peremeloszlások esetén

Ha adottak a ξ és η diszkrét valószínűségi változók eloszlása, akkor megszerkeszthető az együttes eloszlásuk úgy, hogy a köztük lévő korreláció maximális, illetve minimális legyen. Legyenek a ξ és η eloszlásai rendre

$$P(\xi = x_i) = p_i, i = 1, \dots, m \quad (3.1)$$

és

$$P(\eta = y_k) = q_k, k = 1, \dots, n. \quad (3.2)$$

Célunk az, hogy a

$$P(\xi = x_i, \eta = y_k) = p_{ik}, i = 1, \dots, m; k = 1, \dots, n \quad (3.3)$$

együttes valószínűségeket úgy határozzuk meg, hogy a ξ és η valószínűségi változók közötti kovariancia

$$cov(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n x_i y_k p_{ik} - M(\xi)M(\eta) \quad (3.4)$$

maximális, illetve minimális legyen. Mivel a (3.3)képletben az

$$M(\xi) = \sum_{i=1}^m x_i p_i \quad (3.5)$$

és

$$M(\eta) = \sum_{k=1}^n y_k q_k \quad (3.6)$$

várható értékek nem függenek a p_{ik} együttes valószínűségektől, azért elég az alábbi optimalizálási feladatpárt megoldani:

$$\max(\min) \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n x_i y_k p_{ik} \quad (3.7)$$

feltéve, hogy

$$\sum_{k=1}^n p_{ik} = p_i, \quad i = 1, \dots, m$$

$$\sum_{i=1}^m p_{ik} = q_k, \quad k = 1, \dots, n$$

(3.8)

$$p_{ik} \geq 0,$$

$$i = 1, \dots, m;$$

$$k = 1, \dots, n.$$

Mivel nyilvánvalóan teljesül a

$$\sum_{i=1}^m p_i = \sum_{k=1}^n q_k (= 1), \quad (3.9)$$

feltétel, azért a (3.5) feladat egy szállítási feladat, amely általános alakja a következő.

Legyen adott a

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & & & \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

$m \times n$ -es mátrix, továbbá legyenek

$$a_1 \geq 0, \quad a_2 \geq 0, \quad \dots \quad a_m \geq 0, \quad (3.11)$$

$$b_1 \geq 0, \quad b_2 \geq 0, \quad \dots \quad b_n \geq 0,$$

olyan számok, melyekre teljesül a

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{k=1}^n b_k \quad (3.12)$$

feltétel, minimalizálandó

$$\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n c_{ik} x_{ik}, \quad (3.13)$$

feltéve, hogy

$$\sum_{k=1}^n x_{ik} = a_i, i = 1, \dots, m,$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ik} = b_k, k = 1, \dots, n, \tag{3.14}$$

$$x_{ik} \geq 0, i = 1, \dots, m, k = 1, \dots, n.$$

Ugyanezt megfogalmazhatjuk másképpen is, miszerint kitöltendő egy $m \times n$ -es tábla nem negatív x_{ik} számokkal oly módon, hogy

x_{11}	x_{12}				x_{1n}	a_1
x_{21}	x_{22}				x_{2n}	a_2
						.
						.
						.
x_{m1}	x_{m2}				x_{mn}	a_m
b_1	b_2				b_n	

az egyes sorokban az elemek összege megegyezzek a tábla jobb oldalán, az egyes oszlopokban az elemek összege megegyezzek a tábla alján lévő megfelelő a_i , illetve b_k számértékekkel és a (3.13) szorzatösszeg minimális legyen. A fenti táblát szállítási táblának, az a_i , b_k számokat pedig peremértékeknek fogjuk nevezni.

A nemzetközi irodalomban elérhető copulák áttekítése után a numerikus számolásra a szállítási feladatok modelljét választottuk. A számítás alapjául szolgáló adatokat a Központi Statisztikai Hivatal: Demográfiai Évkönyv-ének 2001-es évre vonatkozó Magyarország férfi illetve női halandósági táblájából vettük (1. 1–2. Mellékletek). Az elemi adatokat "a százezer élveszülöttből meghalt a jelzett életkorban (d_x) oszlop szolgáltatatta. A vizsgált személyek életkora esetünkben 50, illetve 20 éves férfi, 40, illetve 18 éves nő volt.

Szállítási probléma maximum feladatként.

$$\max \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}, \quad (3.15)$$

feltéve, hogy

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, i = 1, \dots, m,$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, j = 1, \dots, n,$$

$$x_{ij} \geq 0, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n, \quad (3.16)$$

ahol

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j.$$

A szállítási feladatokra ismert a következő tétel.

3.1. Tétel: *(Rüsendorf tétel) Az északnyugati sarokmódszer szerint megengedett megoldás minden $\{a_i\}$, $\{b_j\}$ sorozat esetén optimális, akkor és csak akkor, ha minden*

$$1 \leq i \leq m - 1,$$

$$1 \leq j \leq n - 1$$

esetén fennáll az alábbi egyenlőtlenség

$$c_{ij} + c_{i+1,j+1} \geq c_{i,j+1} + c_{i+1,j} \quad (3.17)$$

A mi esetünkben

$$\begin{aligned}
 c_{ij} &= x_i y_j \\
 x_1 &\leq x_2 \leq \dots \leq x_m \\
 y_1 &\leq y_2 \leq \dots \leq y_n
 \end{aligned}
 \tag{3.18}$$

A maximális korreláció feladatát megoldja az északnyugati sarokmódszer, a minimális korreláció feladatát pedig a délnyugati sarokmódszer (1. 3. – 8. Mellékletek).

Ez következik Rüsendorf tételéből. A mi esetünkben $c_{ik} = x_i y_k$, ezért a 3.17 feltétel teljesüléséhez az szükséges, hogy

$$\begin{aligned}
 &c_{ij} + c_{i+1,j+1} - c_{i,j+1} - c_{i+1,j} \\
 &= x_i y_k + x_{i+1} y_{k+1} - x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_k \\
 &= x_i (y_k - y_{i+1}) + x_{i+1} (y_{k+1} - y_k) \\
 &= (x_{i+1} - x_i) (y_{k+1} - y_k) \geq 0
 \end{aligned}
 \tag{3.19}$$

teljesüljön. A biztosítási matematikában a túlélési időtartamok valószínűségi modellezésében $x_i = i, i = 1, \dots, m$ és $y_k = k, k = 1, \dots, n$ és ezekre teljesül a (3.19) feltétel.

Az aktuárius jelenérték feladathoz legyenek a $c; c_0, c_1, c_2, c_3, c_4$ értékek a következők:

$$c = \frac{1}{2}; \quad c_0 = 0, \quad c_1 = \frac{1}{8}, \quad c_2 = \frac{1}{4}, \quad c_3 = \frac{1}{2}, \quad c_4 = 1
 \tag{3.20}$$

Ekkor az aktuárius jelenértékre alsó és felső korlátot adó aggregált lineáris programozási feladatok az alábbiak:

Aggregált modell:

$$\min(\max)\left(\frac{1}{8}v_1 + \frac{1}{4}v_2 + \frac{1}{2}v_3 + v_4\right)$$

$$v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 1 (= S_0)$$

$$v_1 + 2v_2 + 3v_3 + 4v_4 = S_1$$

$$v_2 + 3v_3 + 6v_4 = S_2$$

$$v_i \geq 0, \quad i = 0, 1, \dots, 4.$$

$$n = 4 \quad m = 2$$

(3.21)

Mivel rendelkezésünkre állnak az egy és kétdimenziós peremeloszlások valószínűségei, azért mielőtt az S_1 és S_2 értékekbe aggregálnánk azokat, felírhatjuk a (3.21) lineáris programozási feladatoknak megfelelő, úgynevezett diszaggregált lineáris programozási feladatokat is. Ezek optimális megoldásai várhatóan sokkal jobb alsó, illetve felső korlátot fognak adni az aktuárius jelenértékre.

Diszaggregált modell:

$$\begin{array}{rcccccccccccccccc}
 \min(\max) & (\frac{1}{8}t_1 & +\frac{1}{8}t_2 & +\frac{1}{8}t_3 & +\frac{1}{8}t_4 & +\frac{1}{4}t_5 & +\frac{1}{4}t_6 & +\frac{1}{4}t_7 & +\frac{1}{4}t_8 & +\frac{1}{4}t_9 & +\frac{1}{4}t_{10} & +\frac{1}{2}t_{11} & +\frac{1}{2}t_{12} & +\frac{1}{2}t_{13} & +\frac{1}{2}t_{14} & +t_{15}) \\
 & t_0 & +t_1 & +t_2 & +t_3 & +t_4 & +t_5 & +t_6 & +t_7 & +t_8 & +t_9 & +t_{10} & +t_{11} & +t_{12} & +t_{13} & +t_{14} & +t_{15} & = 1 \\
 & & t_1 & & & & +t_5 & +t_6 & +t_7 & & & & +t_{11} & +t_{12} & +t_{13} & & +t_{15} & = p_1 \\
 & & & t_2 & & & +t_5 & & & +t_8 & +t_9 & & +t_{11} & +t_{12} & & +t_{14} & +t_{15} & = p_2 \\
 & & & & t_3 & & & +t_6 & & +t_8 & & +t_{10} & +t_{11} & & +t_{13} & +t_{14} & +t_{15} & = p_3 \\
 & & & & & t_4 & & & +t_7 & & +t_9 & +t_{10} & & +t_{12} & +t_{13} & +t_{14} & +t_{15} & = p_4 \\
 & & & & & & t_5 & & & & & & +t_{11} & +t_{12} & & & +t_{15} & = p_{12} \\
 & & & & & & & t_6 & & & & & +t_{11} & & +t_{13} & & +t_{15} & = p_{13} \\
 & & & & & & & & t_7 & & & & & +t_{12} & +t_{13} & & +t_{15} & = p_{14} \\
 & & & & & & & & & t_8 & & & +t_{11} & & & +t_{14} & +t_{15} & = p_{23} \\
 & & & & & & & & & & t_9 & & & +t_{12} & & +t_{14} & +t_{15} & = p_{24} \\
 & & & & & & & & & & & t_{10} & & & +t_{13} & +t_{14} & +t_{15} & = p_{34} \\
 & & & & & & & & & & & & & & & & & & (3.22)
 \end{array}$$

$$t_i \geq 0, \quad i = 0, 1, \dots, 15.$$

A független esetben S_1 -en és S_2 -n túl S_3 és S_4 is számolható, hiszen minden k -ra $k = 1, \dots, 4$

$$S_k = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} p_{i_1} \dots p_{i_k} = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} p_{i_1} \dots p_{i_k} \quad (3.23)$$

Ezért a

$$\begin{aligned} v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + v_4 &= 1 \\ v_1 + 2v_2 + 3v_3 + 4v_4 &= S_1 \\ v_2 + 3v_3 + 6v_4 &= S_2 \\ v_3 + 4v_4 &= S_3 \\ v_4 &= S_4 \end{aligned} \quad (3.24)$$

lineáris egyenletrendszer egyetlen megoldására szükségképpen teljesülni kell a $v_i \geq 0$, $i = 0, 1, \dots, 4$ nemnegativitási feltételeknek, és az ezekkel az értékekkel számított $\frac{1}{8}v_1 + \frac{1}{4}v_2 + \frac{1}{2}v_3 + v_4$ érték pontosan egyenlő lesz az aktuárius jelenértékkel.

Az aggregált és a diszaggregált feladatok valamint a független eset eredményeit táblázatba foglaltuk. A táblázatokból leolvasható, hogy a minimális korreláció alsó és felsőkorlátjai a 28. sor után már nem számíthatók, hiszen ezek az értékek az életkorokból adódnak.

Az aggregált modell éles alsó és felső korlátokat adott a minimum korreláció esetében, a maximum korreláció alsó és felső korlátjai eltérést mutatnak.

7. táblázat: Az aggregált modellek eredményei

T	Max. korr. alsó határ	Max. korr. felső határ	Min. korr. alsó határ	Min. korr. felső határ	Független eset pontos érték
1	0,992537	0,992890	0,991832	0,991832	0,991843
2	0,984628	0,985364	0,983158	0,983158	0,983203
3	0,976285	0,977436	0,973983	0,973983	0,974093
4	0,973298	0,974900	0,970094	0,970094	0,970265
5	0,964065	0,966155	0,959883	0,959883	0,960185
6	0,954351	0,956972	0,949107	0,949107	0,949588
7	0,944135	0,947332	0,937739	0,937739	0,938459
8	0,933419	0,937241	0,925774	0,925774	0,926800
9	0,922194	0,926688	0,913207	0,913207	0,914617
10	0,910436	0,915645	0,900019	0,900019	0,901902
11	0,898113	0,904081	0,886176	0,886176	0,888632
12	0,885224	0,891996	0,871681	0,871681	0,874819
13	0,871779	0,879396	0,856544	0,856544	0,860486
14	0,857769	0,866286	0,840734	0,840734	0,845617
15	0,843183	0,852673	0,824202	0,824202	0,830185
16	0,827994	0,838560	0,806863	0,806863	0,814139
17	0,812235	0,824012	0,788680	0,788680	0,797480
18	0,795938	0,809089	0,769634	0,769634	0,780230
19	0,779090	0,793799	0,749672	0,749672	0,762379
20	0,761631	0,778096	0,728703	0,728703	0,743886
21	0,743470	0,761898	0,706616	0,706616	0,724697
22	0,724534	0,745137	0,683328	0,683328	0,704785
23	0,704814	0,727816	0,658810	0,658810	0,684180
24	0,684348	0,709984	0,633074	0,633074	0,662956
25	0,663212	0,691736	0,606164	0,606164	0,641220
26	0,641511	0,673186	0,578162	0,578162	0,619114
27	0,619275	0,654373	0,549078	0,549078	0,596712
28	0,597015	0,635808	0,519429	0,519429	0,574509
29	0,574678	0,617250	n.a.	n.a.	0,552488
30	0,552198	0,597356	n.a.	n.a.	0,530629
31	0,529504	0,577319	n.a.	n.a.	0,508911

7. táblázat: (folytatás)

T	Max. korr. alsó határ	Max. korr. felső határ	Min. korr. alsó határ	Min. korr. felső határ	Független eset pontos érték
32	0,506569	0,557115	n.a.	n.a.	0,487358
33	0,483408	0,536757	n.a.	n.a.	0,466031
34	0,460050	0,516270	n.a.	n.a.	0,444997
35	0,436533	0,495692	n.a.	n.a.	0,424319
36	0,415456	0,475067	n.a.	n.a.	0,404047
37	0,397229	0,454165	n.a.	n.a.	0,383997
38	0,379196	0,433706	n.a.	n.a.	0,364755
39	0,361415	0,413778	n.a.	n.a.	0,346350
40	0,343924	0,394446	n.a.	n.a.	0,328780
41	0,326758	0,375770	n.a.	n.a.	0,312026
42	0,309930	0,357784	n.a.	n.a.	0,296046
43	0,293450	0,340507	n.a.	n.a.	0,280780
44	0,277305	0,323925	n.a.	n.a.	0,266156
45	0,261474	0,308001	n.a.	n.a.	0,252098
46	0,245941	0,292698	n.a.	n.a.	0,238542
47	0,230713	0,278001	n.a.	n.a.	0,225450
48	0,215834	0,263942	n.a.	n.a.	0,212825
49	0,201377	0,250585	n.a.	n.a.	0,200694
50	0,187451	0,238046	n.a.	n.a.	0,189115

Igen szép eredményt adott a diszaggregált modell. A maximum korreláció és a minimum korreláció estében is éles alsó és felső korlátokat kaptunk.

8. táblázat: A diszaggregált modellek eredményei

T	Max. korr. alsó határ	Max. korr. felső határ	Min. korr. alsó határ	Min. korr. felső határ
1	0,992708	0,992708	0,991832	0,991832
2	0,984993	0,984993	0,983158	0,983158
3	0,976864	0,976864	0,973983	0,973983
4	0,974115	0,974115	0,970094	0,970094

8. táblázat: (folytatás)

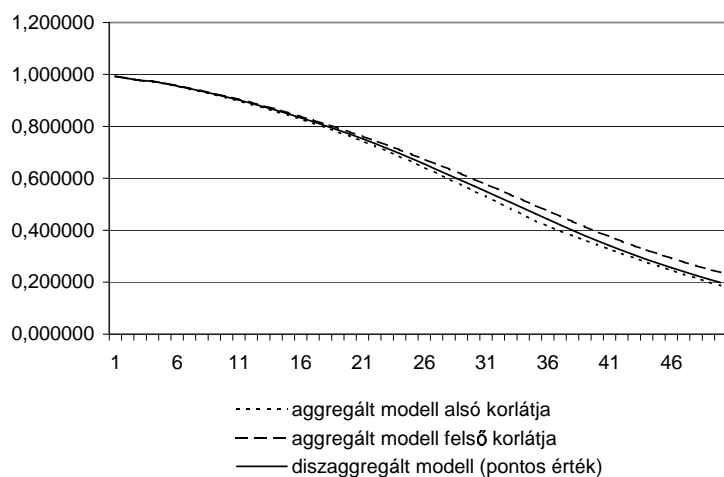
T	Max. korr. alsó határ	Max. korr. felső határ	Min. korr. alsó határ	Min. korr. felső határ
5	0,965142	0,965142	0,959883	0,959883
6	0,955711	0,955711	0,949107	0,949107
7	0,945804	0,945804	0,937739	0,937739
8	0,935424	0,935424	0,925774	0,925774
9	0,924565	0,924565	0,913207	0,913207
10	0,913204	0,913204	0,900019	0,900019
11	0,901309	0,901309	0,886176	0,886176
12	0,888872	0,888872	0,871681	0,871681
13	0,875899	0,875899	0,856544	0,856544
14	0,862378	0,862378	0,840734	0,840734
15	0,848301	0,848301	0,824202	0,824202
16	0,833652	0,833652	0,806863	0,806863
17	0,818467	0,818467	0,788680	0,788680
18	0,802787	0,802787	0,769634	0,769634
19	0,786600	0,786600	0,749672	0,749672
20	0,769850	0,769850	0,728703	0,728703
21	0,752452	0,752452	0,706616	0,706616
22	0,734332	0,734332	0,683328	0,683328
23	0,715486	0,715486	0,658810	0,658810
24	0,695952	0,695952	0,633074	0,633074
25	0,675813	0,675813	0,606164	0,606164
26	0,655180	0,655180	0,578162	0,578162
27	0,634084	0,634084	0,549078	0,549078
28	0,613037	0,613037	0,519429	0,519429
29	0,591992	0,591992	n.a.	n.a.
30	0,570897	0,570897	n.a.	n.a.
31	0,549698	0,549698	n.a.	n.a.
32	0,528379	0,528379	n.a.	n.a.
33	0,506964	0,506964	n.a.	n.a.
34	0,485490	0,485490	n.a.	n.a.
35	0,464009	0,464009	n.a.	n.a.

8. táblázat: (folytatás)

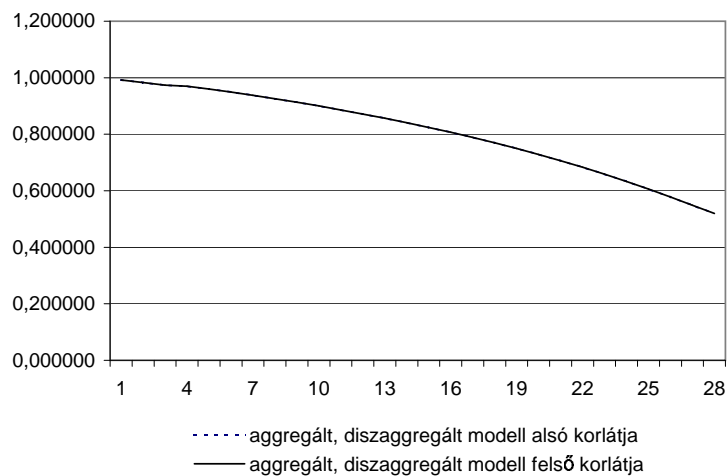
T	Max. korr. alsó határ	Max. korr. felső határ	Min. korr. alsó határ	Min. korr. felső határ
36	0,442576	0,442576	n.a.	n.a.
37	0,421013	0,421013	n.a.	n.a.
38	0,399953	0,399953	n.a.	n.a.
39	0,379490	0,379490	n.a.	n.a.
40	0,359698	0,359698	n.a.	n.a.
41	0,340639	0,340639	n.a.	n.a.
42	0,322337	0,322337	n.a.	n.a.
43	0,304793	0,304793	n.a.	n.a.
44	0,287969	0,287969	n.a.	n.a.
45	0,271798	0,271798	n.a.	n.a.
46	0,256202	0,256202	n.a.	n.a.
47	0,241113	0,241113	n.a.	n.a.
48	0,226503	0,226503	n.a.	n.a.
49	0,212385	0,212385	n.a.	n.a.
50	0,198832	0,198832	n.a.	n.a.

A következő ábrákon összehasonlítjuk a maximális páronkénti korrelációk, a minimális páronkénti korrelációk esetére és a független esetre az aggregált és a diszaggregált modellekkel kapott eredményeket. A 11. ábra a maximális páronkénti korrelációk esetére adja meg az aggregált modell által nyert alsó és felső korlátok, valamint a diszaggregált modell által nyert pontos értékek grafikonjait. A 12. ábra ugyanezeket adja meg a minimális páronkénti korrelációk esetére, mely esetben azonban már az aggregált modell esetében is egyenlők az alsó és felső korlát értékek, vagyis az ábra egyetlen grafikon képét mutatja. A 13. ábra a független eset pontosan kiszámítható értékeinek a grafikonját adja meg. Végül a 14. ábrán jól összehasonlítható a minimális páronkénti korrelációk, a maximális páronkénti korrelációk esetére, illetve a független esetre nyert grafikonok menetei. Ameddig számíthatók a minimális páronkénti korrelációk esetére vonatkozó értékek, addig ennek az esetnek a grafikonja halad a legalacsonyabban, ezt követi a független eset grafikonja és csak azután következik a maximális páronkénti korrelációk

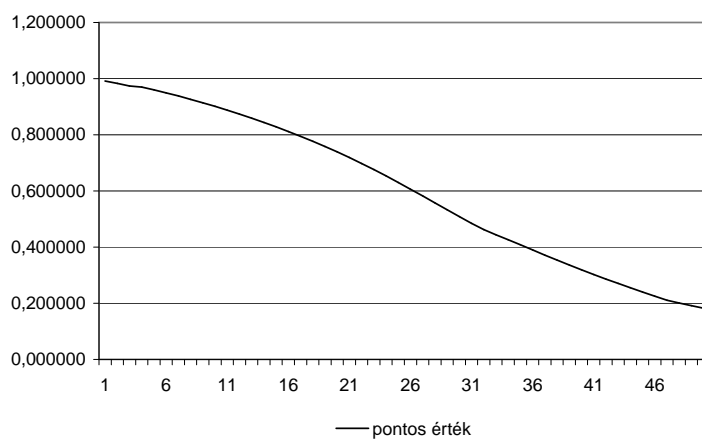
esetének megfelelő grafikon. Tehát, amint arra számítani lehetett, a minimális és maximális páronkénti korrelációk esetére számított aktuárius jelenérték grafikonok mintegy közrefogják a független esetre számított hasonló grafikonot.



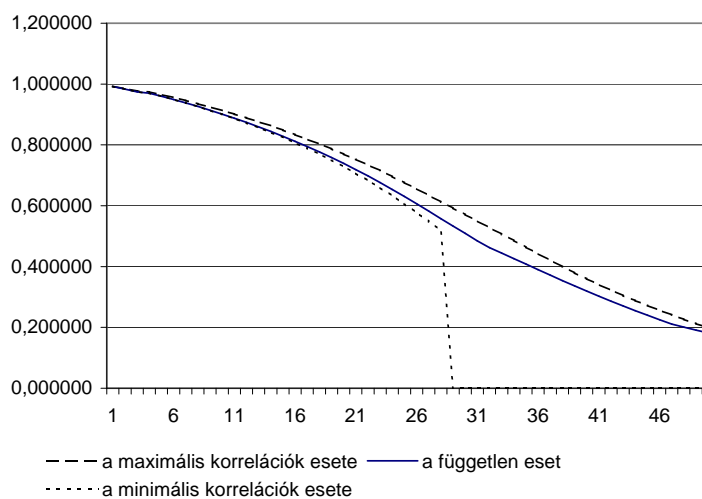
11. ábra. A maximális páronkénti korrelációk esete



12. ábra. A minimális páronkénti korrelációk esete



13. ábra. A független eset



14. ábra. A minimális páronkénti korrelációk, a maximális páronkénti korrelációk és a független eset összehasonlítása

A 9. táblázat a maximális páronkénti korrelációkból összeállított korrelációs mátrixot mutatja. Ennek a sajátértékei rendre 3,948340; 0,048197; 0,002802 és 0,000657, tehát az összeállított mátrix pozitív definit.

9. táblázat: A maximális korrelációk mátrixa

	50	40	20	18
50	1,000000	0,972732	0,988716	0,957022
40	0,972732	1,000000	0,993589	0,996325
20	0,988716	0,993589	1,000000	0,988095
18	0,957022	0,996325	0,988095	1,000000

A 10. táblázat a minimális páronkénti korrelációkból összeállított „korrelációs” mátrixot mutatja. Ennek a sajátértékei rendre 1,991450; 1,267440; 1,172980 és -0,431862, tehát az összeállított mátrixra sajnos nem teljesül a pozitív szemidefinittség, ami azt jelenti, hogy a páronkénti minimális korrelációkkal előállított kétdimenziós peremeloszlásokból nem áll elő valódi négydimenziós eloszlás. Ezért a páronkénti minimális korrelációk esetére nyert eredményeket csak fenntartással szabad tekinteni. Ezen a problémán úgy lehetne segíteni, hogy valamilyen értelemben minimális korrelációkkal bíró négydimenziós együttes eloszlást kellene előállítani, ezt azonban ebben a disszertációban nem tesszük meg.

10. táblázat: A minimális korrelációk mátrixa

	50	40	20	18
50	1,000000	-0,959192	-0,466836	-0,448711
40	-0,959192	1,000000	-0,289014	-0,271188
20	-0,466836	-0,289014	1,000000	-0,266316
18	-0,448711	-0,271188	-0,266316	1,000000

Összefoglalás

A dolgozatban a valószínűségelméleti fogalmak, statisztikai módszerek és a sztochasztikus folyamatok elméletének Prékopa András által javasolt alkalmazását dolgoztuk ki.

A dolgozat első fejezetében sorosan és párhuzamosan kapcsolt elemekből felépülő rendszerek működési idejének várható értékére adtunk alsó és felső korlátot. E korlátok alkalmazását az tette szükségessé, hogy bonyolult, nagy rendszerek esetében a működési idő várható értéke nem számítható ki numerikusan. A korlátok meghatározásakor a diszkrét momentum problémával kapcsolatos eredményekre támaszkodtunk. Az első fejezet negyedik szakaszában egy vasútközlekedési alkalmazást mutattunk be. Az ebben a szakaszban ismertetett műszaki rendszer se nem soros, se nem párhuzamos, mégis alkalmazhatók voltak rá az első fejezet eredményei. Ezt azzal lehetett elérni, hogy a kezdőpontból a végpontba vezető utak „soros” rendszerét egymással „párhuzamosan” tekintve, ez utóbbi párhuzamos rendszerre alkalmazni lehetett a fejezetben ismertetett alsó és felső korlát szerkesztési módszereket. Az első fejezet ötödik szakaszában egy városi közlekedési alkalmazást mutatok be.

A második fejezetben a csoportos életbiztosítási aktuárius jelenérték kiszámításához a csoportban szereplő egyének élettartamait a szakirodalomban általában független valószínűségi változóknak tekintik. A valóságban azonban az élettartamok igen gyakran sztochasztikusan összefüggőknek bizonyulnak és a tényleges együttes eloszlással számított aktuárius jelenérték jelentősen eltérhet attól az értéktől, amit a függetlenség feltételezésére támaszkodva nyerünk. Dolgozatunkban módszert adtunk a jelenérték alsó és felső korlátainak számítására, miközben az élettartamok körében csak kis számú valószínűségi változó együttes eloszlásának ismeretét tételeztük fel. A korlátok a binomiális momentumproblémákra támaszkodva voltak nyerhetők. A dolgozat második és harmadik fejezete a valószínűségszámítás, a statisztika és a sztochasztikus folyamatok eszközrendszerének biztosításmatematikai felhasználását mutatta be.

Summary

The effort in the dissertation was the application of the probability theory, statistical methods and theory of stochastic processes as they were suggested by András Prékopa.

Lower and upper bounds for the expected time to failure of series - parallel systems are presented. In this dissertation the bounds are necessitated by the fact that in case of large systems the above-mentioned value cannot be calculated exactly, in general. The bounds are obtained by the use of the discrete moment problem. In the fourth section of the first chapter an application for the railway transportation is presented. The technical system in this case is neither series nor parallel, however the results of the first chapter can be applied for it. The idea is that the serial system of the paths from the original node to the final node can be regarded in parallel way and the lower and upper bounding techniques can be applied in the latter case. In the fifth section of the first chapter an urban traffic application is presented.

For the calculation of the actuarial present value of group life insurance it is usually assumed that the lifetimes of the individuals are independent random variables. In reality, however, they are frequently stochastically dependent and the real actuarial present value may be significantly different from that computed on the basis of independence. In this dissertation we present a method to obtain lower and upper bounds for the actuarial present value, where we use the joint distributions of only a few of random variables. The bounds are obtained by the use of the binomial moment problem.

The application of the ensemble of systems of probability, statistics and stochastic processes on the sphere of actuarial mathematics is presented in the dissertation.

Köszönetnyilvánítás

Kedves kötelességemnek teszek eleget, amikor köszönetemet fejezem ki témavezetőmnek Bakó Andrásnak, aki a közlekedési alkalmazások lehetőségeire ráirányította a figyelmemet és szakmai tanácsokkal látott el annak kidolgozása során.

Köszönettel tartozom Prékopa András akadémikusnak, az évek során nyújtott számtalan szakmai tanácsért, az oktatásért, a sok időért és energiáért, a kitartó segítségért.

Szántai Tamás oktatómnak a lelkiismeretes felkészítésért, a számtalan konzultációért, mellyel a Doktori Iskolával járó feladatokat végigvihettem.

Fábián Csaba oktatómnak, aki a kötelező kurzuson kívül a számítástechnikában és a TEX program alkalmazásában időt és energiát nem számolva minden esetben segítségemre volt. Köszönöm a lankadatlan biztatását is.

Végül családomnak, akik munkámat mindvégig szerető támogatással kísérték s elfogadták, hogy több éven át kevesebb időm maradt rájuk.

Hivatkozások

- [1] Bakó, A. and P. Kas: Determining the k -th shortest path by matrix method, *Sigma*, **10**, (1977), 61-66.
- [2] Barlow, R. E, and F. Proschan: *Statistical Theory of Reliability and Life Testing*, Holt, Rhinehart & Winston, New York, (1981) 290.
- [3] Boros, E., and A Prékopa: Probabilistic Bounds and Algorithms for the Maximum Satisfiability Problem, *Annals of Operations Research*, **21**, (1989), 109-126.
- [4] Bowers, Gerber, Hickman, Jones, Nesbitt: *Actuarial Mathematics*, The Society of Actuaries, (1997) 753.
- [5] Carathéodory, C.: Über den Variabilitätsbereich der Fourierschen Konstanten von positiven harmonischen Funktionen, *Rediconti del Circolo Matematico di Palermo*, **32**, (1911), 193-217.
- [6] Eppstein, D.: Finding the k shortest paths, *SIAM Journal on Computation*, **28**, (1999), 652-673.
- [7] Fekete, M. és G. Pólya,: Über ein Problem von Laguerre, *Rediconti del Circolo Matematico di Palermo*, **23**, (1912), 89-120.
- [8] Fi, I.: *Közúti csomópontok tervezési elvei és forgalmi méretezésük*, Műegyetem Kiadó, Budapest, (2005) 469.
- [9] Gessel I. and G. Viennot: Binomial Determinants, Paths, and Hook Length Formulae, *Advances in Mathematics*, **58**, (1985), 300-321.
- [10] Horváth, A., Lower and upper bounds on the expected value of service times of some railway transportation systems, *Acta Technica Jauriensis, Győr*, (2008) accepted.
- [11] Horváth, A., Lower and upper bounds on the probability that hazardous materials can be transported without incident from a point to another, *Pollack Periodica, Pécs*, (2008) submitted.

- [12] Horváth A. és Prékopa A.: Alsó és felső korlátok rendszerek működési idejének várható értékére. *Alkalmazott Matematikai Lapok*, **21**, (2004), 131-149.
- [13] Horváth A. és Prékopa A.: Alsó és felső korlátok a csoportos életbiztosítási aktuárius jelenértékre együttes valószínűségeloszlások figyelembevételével, *Alkalmazott Matematikai Lapok*, **21**, (2004), 301-315.
- [14] Jordan, C.: *Calculus of Finite Differences*, Chelsea, New York, (1947) 652.
- [15] Megyeri, J. *Vasútépítéstan*, Műegyetem Kiadó, Budapest, (1991) 280.
- [16] Megyeri, J.: *Vasútépítés*, Műegyetem Kiadó, Budapest, (1994) 335.
- [17] Nemesdy, E.: *Vágánykapcsolások és vasúti állomások*, Tankönyvkiadó, Budapest, (1966) 321.
- [18] Prékopa, A.: *Lineáris programozás*, Bolyai Matematikai Társulat, Budapest, (1968) 402.
- [19] Prékopa, A.: Boole-Bonferroni Inequalities and Linear Programming, *Operations Research*, **36**, (1988), 145-162.
- [20] Prékopa, A.: The Discrete Moment Problem and Linear Programming, *Discrete Applied Mathematics*, **27**, (1990), 235-254.
- [21] Prékopa, A.: *Stochastic Programming*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, (1995) 599.
- [22] Prékopa, A.: A Brief Intraduction to Linear Programming, *Mathematical Scientist*, **21**,(1996), 85-111.
- [23] Rade, L.: Expected Time Failure of Reliability Systems, *Mathematical Scientist*, **14**, (1989), 24-37.
- [24] Riordan, J.: *Combinatorial Identities*, Wiley, New York, (1968) 256.
- [25] Takács, L.: On the Method of Inclusion and Exclusion, *Journal of the American Mathematical Association*, **62**, (1967), 102-113.

- [26] Yen-Ling Cheu and Hsu-Hao Yang: Minimization of travel time and weighted number of stops in a traffic-light network, *European Journal of Operational Research*, **144** (2003) 565-580.

4. Mellékletek