DOI: 10.15477/SZE.MMTDI.2017.007

KÖZÚTI JÁRMŰVEK DINAMIKAI MODELLEZÉSE, IDENTIFIKÁCIÓJA ÉS REZGÉSANALÍZISE

ÍRTA:
Szauter Ferenc

TÉMAVEZETŐK:

Péter Tamás
műszaki tudományok kandidátusa
Járműipari Kutatóközpont, Széchenyi István Egyetem

Szabó Zoltán
MTA Doktora, egyetemi tanár
Közlekedési Tanszék, Széchenyi István Egyetem

DOKTORI ÉRTEKEZÉS

Széchenyi István Egyetem
Infrastrukturális Rendszerek Modellezése és Fejlesztése
Multidiszciplináris Műszaki Tudományi Doktori Iskola

GYŐR
2016

DOI: 10.15477/SZE.MMTDI.2017.007

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés **2**

1.1. A hazai iskolák munkásságának bemutatása, a jelenlegi munka kapcsolódása és eredményei . . . 2
1.2. Modellezési szempontok, feltételek . . . 3
1.3. Modellezés és identifikáció mért jelek alapján . . . 5

2. Közúti járművek modellezése fizikai megfontolások alapján **10**

2.1. Negyedjármű modell útgerjesztéssel. Rugózott, rugózatlan tömeg, sajátfrekvenciák . . . 10
2.2. Útgerjesztés modellezése . . . 15
2.2.1. Determinisztikus útgerjesztés . . . 16
2.2.2. Sztochasztikus útgerjesztés . . . 17
2.2.3. Útprofilok szimulációja . . . 19
2.3. Elhanyagolt dinamika szerepe . . . 20

3. Kísérleti körülmények leírása **24**

3.1. A mérés bemutatása . . . 25
3.1.1. A méréshez használt autóbusz adatai . . . 25
3.2. A mérés előkészítése . . . 27
3.3. A gyorsulásmérő rendszer és az adatfájlokban beazonosított csatornái . . . 29
3.4. Identifikációs mérések . . . 29
3.5. Forgalomban végzett mérések . . . 32
3.6. A mért adatok feldolgozása . . . 33

4. A mért adatok nemparametrikus statisztikai analízise **36**

4.1. Periodogram . . . 37
4.2. A Welch módszer . . . 38
4.3. Mérések feldolgozása . . . 39
4.4. A felfüggesztési rendszer spektrálanalízise . . . 41
4.5. Következtetések . . . 45

DOI: 10.15477/SZE.MMTDI.2017.007

5. AR és ARMA modell identifikáció és spektrál analízis **46**
5.1. Parametrikus spektrális becslés 47
5.1.1. A paraméterbecslési feladat 48
5.2. A felfüggesztési rendszer parametrikus spektrálanalízise 49
5.3. A modellbizonytalanság hatása 55
5.4. Következtetések és kitekintés 57

6. Tézisek **58**

7. Összefoglalás **62**

8. Summary **63**

DOI: 10.15477/SZE.MMTDI.2017.007

A. Függelék **64**
A.1. Lineáris időinvariáns rendszerek modellezése 64
A.1.1. Zaj folyamatok modellezése 65
A.1.2. Átviteli függvények 66
A.1.3. ARMA modellek 66
A.1.4. ARX modellek 67
A.1.5. ARMAX modellek 67
A.2. Predikciós hiba minimalizálásán alapuló paraméterbecslés 68
A.3. Legkisebb négyzetek (LS) módszerén alapuló paraméterbecslés 71
A.3.1. LS becslés tulajdonságai 74
A.4. Maximum Likelihood becslés 76
A.4.1. Az ML becslés elve 76
A.4.2. Valószínűségi modellek likelihood függvényei 77
A.4.3. SISO Gauss eloszlású eset 77
A.4.4. LS modellek 78
A.4.5. Pszeudo-lineáris regressziós modell 79
A.5. Az aszimptotikus paraméter becslések statisztikai tulajdonságai 79
A.6. A határérték frekvencia tartományi jellemzése 80
A.6.1. Rögzített zaj modell 81
A.6.2. Függetlenül parametrizált zaj modell 82
A.6.3. Általános esetre vonatkozó megjegyzések 82
A.7. Mérések feldolgozása és kiértékelése 83
A.7.1. Az 1. szegmens eredményei 83
A.7.2. A 2. szegmens eredményei 85
A.7.3. A 3. szegmens eredményei 87
A.7.4. A 4. szegmens eredményei 89
A.7.5. Az 5. szegmens eredményei 91
A.7.6. A 6. szegmens eredményei 93
A.7.7. A 7. szegmens eredményei 95
A.7.8. A 8. szegmens eredményei 97

Irodalomjegyzék **99**

Saját Publikációk **104**

DOI: 10.15477/SZE.MMTDI.2017.007

Köszönetnyílvánítás

Ezúton szeretnék köszönetet mondani mindazoknak, akik a munkámat segítették és támogatták!

Első sorban köszönetet mondanék vezetőmnek, Prof. Dr. Bokor Józsefnek, aki az MTA rendes tagja, a JKK elnöke, aki folyamatosan szemmel tartotta a munkásságomat, olyan erőforrásokat és segítséget biztosított, amelyek nélkül ez a dolgozat nem készülhetett volna el.

Természetesen őszinte köszönetet szeretnék mondani konzulenseimnek, Dr. Péter Tamásnak és Prof. Dr. Szabó Zoltánnak akik a munkám során folyamatosan rendelkezésemre álltak, hasznos tanácsokkal és iránymutatásokkal láttak el.

Köszönöm a Doktori Iskola vezetőinek, Prof. Dr. Keviczky Lászlónak és Prof. Dr. Várlaki Péternek az éveken át nyújtott segítségüket és őszinte szigorukat amelyre nagy szükség van az Iskola színvonalának megtartásához.

Köszönöm tanszékvezetőmnek, Dr. Lakatos Istvánnak a támogatását, hogy a tanszéki munka szervezésénél figyelembe vette a disszertációval kapcsolatos munkám terhelését.

A Széchenyi István Egyetem vezetőinek, de közülük is kiemelten Prof. Dr. Szekeres Tamás rektor úrnak, aki bíztató beszélgetéseivel már a tanulmányaim kezdetén is támogatott. Köszönet illet minden Munkatársamat, akik közvetlenül segítették a disszertáció megírását: Prof. Dr. Gáspár Péter, Dr. Rödönyi Gábor, Istenes György, Szuromi Csaba.

A Járműipari Kutatóközpont és a Közúti és Vasúti Járművek Tanszék munkatársainak, akik közül néhányukat kiemelnék: Dr. Varga Zoltán, Pup Dániel, Kígyóssy Csilla, Szeli Zoltán, Peterka Mária, Doktor Zsuzsanna, akik a lehető legtöbb terhet levették a vállamról, hogy több időt fordíthassak disszertációs munkámban való elmélyülésre.

Köszönetet szeretnék mondani a Kisalföld Volánnak és munkatársainak, amiért a mérések elvégzéséhez járművezetővel együtt rendelkezésünkre bocsátották az egyik autóbuszukat.

És nem utolsó sorban külön köszönetet mondok türelmes és szerető Családomnak, mert a biztos háttér elengedhetetlen a sikeres munkához!

DOI: 10.15477/SZE.MMTDI.2017.007

1. Bevezetés

A járműdinamika, modellezés és rezgésanalízis fontos szerepet játszik a menetdinamika, utazási komfort és járműirányítás tervezése szempontjából. A vezetés támogató rendszerek, autonóm járműfunkciók tervezésénél a modell alapú irányítási rendszerek alkalmazása szükséges amihez részben a jármű-mechanika alapján kidolgozott modellek használata, ezek mérések alapján való verifikációja továbbá magukból a mérésekből való modellezés, azaz a rendszer identifikáció alkalmazása szükséges.

1.1. A hazai iskolák munkásságának bemutatása, a jelenlegi munka kapcsolódása és eredményei

A jármű szerkezetek méretezése, a járműdinamika modellezése és a rendszeridentifikáció alkalmazása az 1980-as években két hazai tudományos iskola együttműködéséből alakult ki. Az egyik a Michelberger Pál által a Budapesti Műegyetemen vezetett csoport volt, amelyikben jármű mérnökök és kiemelkedő képességű matematikusok vettek részt. Hivatkozunk itt a Michelberger Pál, Várlaki Péter, Keresztes Albert, Szeidl László, Terdik György, Péter Tamás professzorok és szerzőtársaik eredményeire [1, 26, 33, 34, 35, 50].

Munkájukban a kocsiszekrényt vagy merev testként vagy rugalmas gerendaként modellezték, a futómű és a kerekek modelljei pedig mind lineáris mind nemlineáris (bilineáris) modellként voltak leírva. Az útgerjesztést mint sztochasztikus folyamatot vették figyelembe.

A különböző járműdinamikai feladatokra kidolgozott modellstruktúrák adott autóbusz típusra való validálását az akkori Ikarusz gyár hidropulz berendezésein végzett mérések alapján végezték el. Az előre tervezett útgerjesztésekre kapott válaszjelek alapján spektrál analízist végeztek és frekvencia függvény nemparametrikus becsléseit számolták ki közvetlenül az analóg jelekből, majd mintevételezés után az akkor már elérhető számítógépeken.

A jármű modellek mérési adatokból való identifikációját Keviczky László kutató csoportjával (Bányász Csilla, Bokor József, később Gáspár Péter is) együttműködésben végezték el, ahol mind az elméleti, mind a gyakorlati algoritmusok kidolgozásának kérdéseivel foglalkoztak és a megfelelő szoftverek megírását is elvégezték. Az eredményeket számos nemzetközi fórumon mutatták be, [3, 16].

Igen jelentős továbblépést eredményezett Palkovics László munkássága, [4, 38], aki az aktív járműdinamikai irányítás területén elért kezdeti, bár nemzetközi szinten teljesen új, főleg elmé-

DOI: 10.15477/SZE.MMTDI.2017.007

leti eredményeket továbbfejlesztve, ipari feladatok megoldására alkalmassá téve elindította a Knorr Bremse majd a Thissen Krupp kutatásokat. Ehhez az irányhoz csatlakozott Gáspár Péter és Szabó Zoltán, [9, 45], majd Szászi István a Bosch fejlesztő intézetének hazai megalapításakor, [46].

A további kutatás–fejlesztési munkák eredményei oda vezettek, hogy jelentős hazai kutatás alakult ki az országban mind akadémiai, mind egyetemi és ipari környezetben.

Ez a munka ehhez az irányhoz kapcsolódik, egy városi autóbusz városi útvonalon való haladásánál elsősorban gyorsulás mérések alapján a vertikális rezgés analízisben valamint a vertikális dinamika modelljeinek identifikációjában elért eredményeket kívánja bemutatni.

Az értekezés második fejezetében a vertikális jármű dinamikát leíró modelleket, az útgerjesztés modelljeit valamint a közelítő modellek használatánál előálló elhanyagolt dinamika modelljeit mutatjuk meg. Ez utóbbi fontos szerepet játszik mind a paraméter becslések kiértékelésében, mind a robusztus irányítások tervezésében.

A harmadik fejezet mutatja be a kísérleti körülményeket, egy városi busz műszaki jellemzőit, a műszerezést és az identifikációs célú méréseket a megfelelő útvonalakkal.

A negyedik fejezetben mutatjuk be a felfüggesztési rendszer mérések alapján számított nemparametrikus spektrál analízisének eredményeit.

Az ötödik fejezetben az AR és ARMA modellek identifikációját valamint a modellek alapján számított pólustérképeket és AR, ARMA spektrumokat mutatjuk be.

A kétféle megközelítés eredményei alapján megmutatjuk hogy a futómű-dinamika frekvencia tartománybeli viselkedése lengéskényelmi és járműdinamikai szempontból kiértékelhető, de mindkét megközelítés együttes alkalmazása és összevetése szükséges a helyes eredmények eléréséhez, ha valódi üzemi körülmények között működő járművek vizsgálata a feladat. Megmutatjuk továbbá hogy a rögzített struktúrájú modellek, mint a széles körben használt negyedjármű modell korrekt fizikai paramétereket adó identifikációja csak több módszer együttes alkalmazásával oldható meg. Ehhez az értekezés megad egy eljárást, ami az elhanyagolt dinamika hatását is figyelembe tudja venni.

A modelleket, a struktúra és paraméter becsléshez felhasznált módszereket, valamint az egyes mérésekre vonatkozó eredményeket a Függelékben foglaltuk össze.

1.2. Modellezési szempontok, feltételek

A jármű lengőrendszerek általánosabb matematikai vizsgálatainál legtöbb esetben sztochasztikus dinamikus modelleket alkalmaznak, [13, 41]. A valóságos körülmények közepette üzemelő gépjármű rendszerek bemenetein jelentkező sebességfolyamatok és a keréktalppontokon fellépő gerjesztések is sztochasztikus folyamatokként modellezhetőek. Mérések és spektrális analízis felhasználásával számos kutató állapított meg lényeges összefüggéseket a sztochasztikus útprofilok statisztikai jellemzőinek leírására. Bizonyos esetekben a motor, az erőátviteli berendezések és a kerekek rezgéskeltő hatásait is figyelembe kell venni, [42, 33, 44].

DOI: 10.15477/SZE.MMTDI.2017.007

A közúti járművek lengéseinek vizsgálatára vonatkozó mechanikai modellek az esetek többségében időfüggő és nemlineáris differenciálegyenlet-rendszerek felírását igénylik. Időfüggő modellekkel dolgozunk, ha figyelembe vesszük a szállítmány változását, vagy ha nagyon hosszú időtartamon folyik a vizsgálat, továbbá ha az üzemeltetés során igen erős fárasztó igénybevételek lépnek fel.

Az adaptív lengőrendszerek modellezésénél ugyancsak természetszerűen lépnek fel időfüggő és nemlineáris modellek. Ekkor ugyanis az irányítási, adott esetben felfüggesztés, paraméterek folyamatos változtatásával kívánunk alkalmazkodni a változó körülményekhez, [21, 16].

A rezgés analízisben és az ehhez kapcsolódó spektrális analízisben a vizsgálatok többségénél alkalmazott klasszikus, nem szabályozott modellek - a sztochasztikus input, determinisztikus mechanikai lengőrendszer és sztochasztikus output jelfolyamatot tekintve – visszacsatolásmentes, nyílt hatásláncú modelleket alkalmazunk. Ezeket a modelleket klasszikus esetben állandó járműsebesség feltételezése mellett szokás használni, feltételezve a sztochasztikus folyamatok stacionaritását.

Megemlítjük itt Michelberger által felismert jelenséget, miszerint a változó haladási sebességfolyamat már visszahat az input útprofil-folyamatra és azt transzformálja. Ennek a jelenségnek a leírására már visszacsatolásos, változó paraméterű, modellt kell alkalmazni, [31, 32].

A vizsgálatok kimutatták, hogy a változó haladási sebességű üzemmódok esetében integráltranszformációs módszer alkalmazásával levezethető az útprofil spektrum torzulása. Az ilyen folyamatok vizsgálata tehát, a torzított spektrum meghatározásával kezdődik és ennek felhasználásával a probléma megoldása (kis elhanyagolással) visszavezethető nyitott hatásláncú modellek alkalmazására,[40].

A gépjármű függőleges lengése jelentős hatást gyakorol a keréktalppont-útprofil kapcsolatára is. Ennek jellemzésére egyes kutatók leggyakrabban a dinamikus kerékterhelés szórást, illetve a kerék útprofilhoz viszonyított elmozdulás szórását használják.

A gépjárművek egyes típusainál - így például a tehergépkocsiknál - a jármű mellső, illetve hátsó részének lengése függetlenné válhat egymástól. Ezért a kutatók közül igen sokan ún. láncmodellt alkalmaznak vizsgálataikhoz.

A valóságos üzemviszonyokra optimalizált felfüggesztés csillapító karakterisztikák minden esetben degresszívek. (A matematikai eljárás alkalmazásakor a csillapítatlan lengőrendszerekre, az esetek többségében különböző tömegterheléseknél biztosítottuk a kocsiszekrény önkörfrekvenciájának az utas-kényelem szempontjából kedvezően állandó értéken tartását is, ezzel eleget téve az ideális légrugó-karakterisztikával szemben támasztott követelménynek.) Úttípusonként vizsgálva az optimális csillapítóerő-karakterisztikákat, megállapítható, hogy azoknál az úttípusoknál (pl. kövesutaknál), amelyeknél az útprofil spektrális sűrűsége a magasabb frekvenciájú összetevőket más utakhoz képest sűrűbben tartalmazza, az optimális csillapító karakterisztikák gyors felfutással, majd hirtelen vízszintes aszimptotával rendelkeznek, lásd [41]. Más úttípusoknál lassúbb, de tartósabb degresszív növekedés figyelhető meg az optimális csillapítóerő-karakterisztikáknál (aszfalt- és betonutak). Sztochasztikus útprofilon futó jármű-

DOI: 10.15477/SZE.MMTDI.2017.007

veknél statisztikusan egyenértékű centrálisan szimmetrikus, illetve a gépjárműveknél megszokott aszimmetrikus csillapítóerő karakterisztikák alkalmazásakor az integrált lengéskényelmi mutatók (szórások, szórásnégyzetek, stb.) értékei nem térnek el számottevően.

Sztochasztikus útprofil-gerjesztések mellett vizsgálva a statisztikusan egyenértékű optimális csillapítókkal ellátott gépjárműveket, a csillapítók teljesítmény elvezetése (dinamikus igénybevétele) a centrálisan szimmetrikus csillapítók esetében sokkal kedvezőbb, mint a szokványos aszimmetriával rendelkező csillapítóknál. Ez utóbbiaknál ugyanis széthúzáskor a mechanikai energia időegységenkénti hővé alakítási folyamata drasztikusabb", lökésszerűbb". Van azonban egy előnye a szokványos aszimmetriával rendelkező csillapításnak, mégpedig az, hogy összenyomást engedélyező hatására" a lengések során a lengőrendszer súlypontjának várható értéke a nyugalmi magasság alá kerül. Az így fellépő dinamikus stabilitás növekedése ellen dolgozik" azonban a rugók összenyomásra progresszív karakterisztikája.

Ha a rövid útegyenetlenségen történő áthaladási folyamatoknál a lengésjellemzők maximális értékeit megvizsgáljuk, akkor azt tapasztaljuk, hogy csak egyetlen esetben, mégpedig csak lengéskényelmi szempontból kedvezőbb a szokványos aszimmetrikus csillapító alkalmazása, akadályra felfutáskor. A különböző statisztikusan egyenértékű csillapítók között a centrálisan szimmetrikus csillapító alkalmazása akadályra felfutáskor kerékstabilitás és teljesítményelvezetés szempontjából, akadályról lefutáskor pedig minden szempontból a legkedvezőbb. A fentiek alapján indokolt a centrálisan szimmetrikus optimális csillapító karakterisztikák alkalmazása a gépjármű lengőrendszerekben.

1.3. Modellezés és identifikáció mért jelek alapján

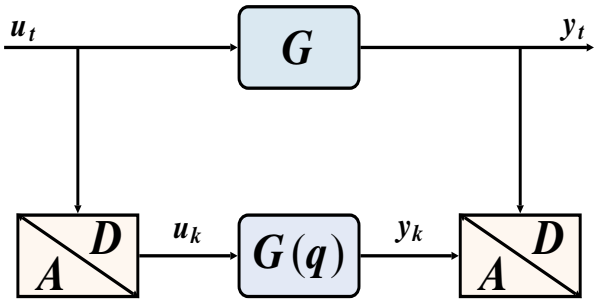
A járműmodell rendszerint differenciálegyenletek formájában ölt testet. Irányításelméleti alkalmazásokban ezek többnyire közönséges differenciálegyenletekkel, szakaszonként közönséges differenciálegyenletekkel (kapcsolt rendszerek, impulzív rendszerek), vagy ún. paraméter (például sebesség) függő lineáris rendszerek, [17, 15, 9]

Ennek megfelelően Lineáris Időinvariáns (LTI), időfüggő (LTV) vagy paraméterfüggő (LPV) rendszerekről beszélünk.

Amikor a teljes modellt fizikai elvek (Hamilton, Lagrange formalizmus, megmaradási elvek, mérlegegyenletek) alapján állítjuk fel akkor fehér doboz (white-box) modellezésről beszélünk. A módszer előnye, hogy a modell fizikai paramétereinek valós tartalma, jelentése van, hátránya viszont, hogy a modell felépítése általában rendkívül bonyolult. Ezen túlmenően a modellbizonytalanságok kezelése is eléggé problematikus.

Egy másik megközelítés a fekete doboz (black-box) modellezés, amikor a modell felállításához csak kísérletekkel, mérésekkel lehet információkat szerezni. Ilyen információ forrása lehet például a vizsgálójelekre adott rendszerválaszok (például az átmeneti- vagy a súlyfüggvény) elemzése. Elsősorban lineáris időinvariáns (LTI) rendszermodellek esetén használatos. Ha nincs más alapinformáció, akkor kiindulásként, mint matematikai modell, például polinom-

DOI: 10.15477/SZE.MMTDI.2017.007



1.1. ábra. Identifikálandó modell

mal vagy racionális függvényekkel történő közelítést lehet felhasználni. A black–box modellek lényeges előnye a viszonylagos egyszerűségük; hátrányuk viszont, hogy a paramétereknek általában nincs valós fizikai jelentése, [3, 20, 5].

E két véglet között helyezkedik el a szürke doboz (grey-box) modellezés, ami az előző két módszer kombinációja. Főleg nemlineáris jelenségek modellezésére használatos. Ekkor a struktúra adott – de nem feltétlenül valamiféle egzakt levezetés eredménye. A (statikus) nemlinearitások leírásakor gyakran heurisztikus ismeretek épülnek be a modellbe. A műszaki gyakorlatban legtöbbször ez az eset fordul elő. Hátránya az, hogy a struktúra és a parametrizálás általában nem örződik meg a szokásos diszkretizálási eljárásokban, [27, 33, 51, 16].

A továbbiakban mi a vertikális dinamika modelljeinek itt használt struktúráival foglalkozunk, használni fogjuk mind a az Euler - Lagrange determinisztikus mind a black-box sztochasztikus modelleket.

Amikor a rendszer modelljének konstruálása a bemenőjelek és a kimenő jelek mért (mintavételezett) adatai alapján történik, az eljárást modell identifikációnak nevezzük. A mért jelek közötti kapcsolat az alábbi alakban írható fel:

$$y = G(q)u \tag{1.1}$$

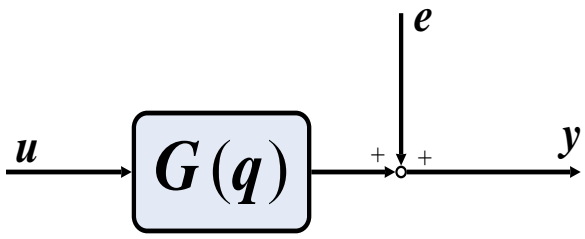
ahol q az úgynevezett eltolás operátor, $G(q)$ modell leírja a rendszer bemenete és kimenete közötti kapcsolatot, azaz a mintavételezett rendszer átviteli függvényét.

Egy zajjal terhelt lineáris időinvariáns rendszer modelljét mutatja az 1.2 ábra. A zajos rendszer modellje:

$$y = G(q)u + e \tag{1.2}$$

ahol q eltolás operátor, e zaj (zavarás).

DOI: 10.15477/SZE.MMTDI.2017.007



1.2. ábra. Zajjal terhelt modell

A rendszeridentifikáció végrehajtása több lépésben történik:

- Bemenő és kimenő jelek mérése, mintavételezése, szűrése, feldolgozása (transzformációja).
- Modell struktúrájának becslése fizikai megfontolások alapján.
- Modell paramétereinek becslése.
- Modell ellenőrzése, tesztelése, validálása.
- Diszkrét modell transzformálása folytonos alakra.

A rendszermodell általános alakja:

$$y(t) = G(q)u(t) + e(t) \tag{1.3}$$

ahol $G(q)$ átviteli függvény, például

$$G(q) = \frac{B(q)}{A(q)} \tag{1.4}$$

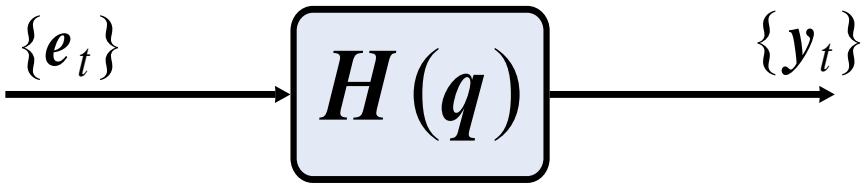
alakban és q az eltolás operátor. Itt $A(q)$ és $B(q)$ polinomok az eltolás operátor szerint a következő alakúak:

$$A(q) = 1 + a_1 q^{-1} + a_2 q^{-2} + \ldots + a_n q^{-n} \tag{1.5}$$

$$B(q) = b_1 q^{-1} + b_2 q^{-2} + \ldots + b_m q^{-m}. \tag{1.6}$$

A fenti modellben az u gerjesztő jel többnyire az általunk generált külső gerjesztést vagy a szabályozó jelet jelöli. Nem mérhető benenőjelek esetén, ilyen az útgerjesztés is, a rendszer bemenetét sztohasztikus folyamatnak (fehér zajnak) tekintve un. AutoRegressive (AR) és AutoRegressive-Moving Average (ARMA) modelleket használunk a rendszer dinamika leírására.

DOI: 10.15477/SZE.MMTDI.2017.007



1.3. ábra. Sztochasztikus átvitelifüggvény modell

Az ARMA(n,m) modell általános alakja:

$$y(t) = H(q)e(t) \tag{1.7}$$

ahol $H(q)$ zajátviteli függvény, lásd az 1.3 és az 1.4 ábrák.

Legyen

$$H(q) = \frac{C(q)}{D(q)} \tag{1.8}$$

ahol q az eltolás operátor, az $C(q)$ és $A(q)$ $m-$ és $n-$edrendű polinomjai az eltolás operátornak:

$$C(q) = 1 + c_1 q^{-1} + c_2 q^{-2} + \ldots + c_n q^{-m} \tag{1.9}$$

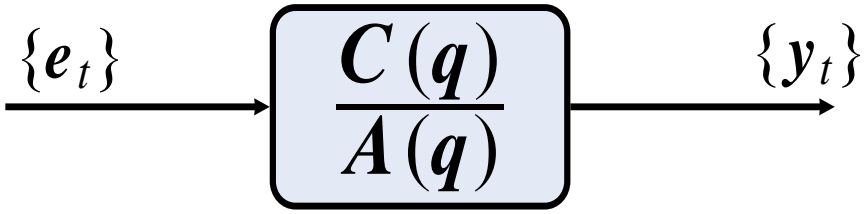
$$A(q) = 1 + a_1 q^{-1} + a_2 q^{-2} + \ldots + a_m q^{-n}. \tag{1.10}$$

Az AR(n) modellben $C(q) = 1$. A két modellnek időtartományban a következő differencia egyenletek felelnek meg:

$$\text{ARMA(n,m):} \quad y_t + a_1 y_{t-1} + \ldots + a_p y_{t-n} = e_t + c_1 e_{t-1} + \ldots + c_q e_{t-m}.$$

$$\text{AR(n):} \quad y_t + a_1 y_{t-1} + \ldots + a_p y_{t-n} = e_t,$$

ahol e_t egy λ varianciájú fehér zaj folyamat.



1.4. ábra. Autoregressive Moving Average (ARMA) modell

DOI: 10.15477/SZE.MMTDI.2017.007

Az identifikált modell tulajdonságait a rendszer tulajdonságaival való összehasonlítással állapítjuk meg. A vizsgálat mind idő, mind frekvenciatartományban elvégezhető, [24, 47, 48, 7, 8]. Formálisan az identifikációs kritérium

$$J(\theta) = \sum_{t=1}^{N} e(t,\theta)^2 \tag{1.11}$$

ahol N a mintaszám, θ a választott modell struktúrának (parametrizálásnak) megfelelő paramétereket tartalmazó vektor, $e(t,\theta)$ pedig a θ paraméterrel számolt predikciós hiba. A paraméter becslés egy optimalizáló eljárás, melynek során a becsült paramétert a

$$\hat{\theta} = arg\min_{\theta} J(\theta) \tag{1.12}$$

optimalizálási feladat megoldásával kapjuk.

A különböző modell struktúrákat, ezek parametrizálását valamint a parametrizálásnak megfelelő paraméter becslési módszereket (LS, ML, PE) a Függelékben adjuk meg.

DOI: 10.15477/SZE.MMTDI.2017.007

2. Közúti járművek modellezése fizikai megfontolások alapján

2.1. Negyedjármű modell útgerjesztéssel. Rugózott, rugózatlan tömeg, sajátfrekvenciák

A felfüggesztési rendszernek különféle egyszerűsített modelljei léteznek. Ezek a modellek a járműdinamika egy részét figyelembe veszik, más részét viszont elhanyagolják. Ezekben a modellekben a járműtest egy rugózott tömeggel van reprezentálva, míg a tengely és a kerekek négy rugózatlan tömeggel. A rugózott és rugózatlan tömegek közötti rugó és csillapító a felfüggesztést reprezentálja. A kerekek és az út közötti kapcsolatot rugó közelíti. A hét-szabadságfokú jármű-modell, lásd a 2.5 ábra, mozgásai:

- a járműtest z függőleges elmozdulása,
- θ bólintási szöge,
- ϕ dőlési szöge, valamint
- rugózatlan tömegek $z_{u_{fl}}, z_{u_{fr}}, z_{u_{rl}}, z_{u_{rr}}$ függőleges elmozdulásai.

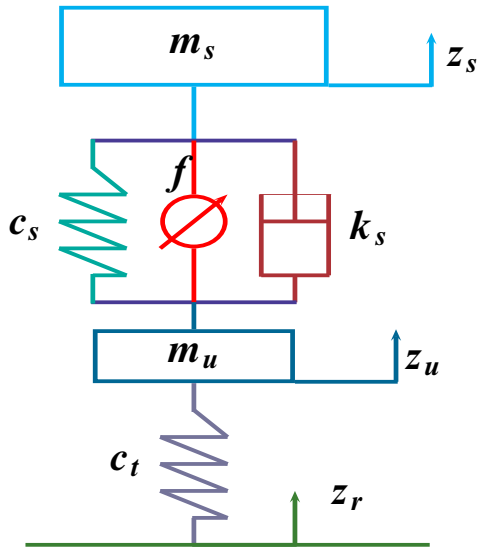
Az útfelület által generált $z_{r1}, z_{r2}, z_{r3}, z_{r4}$ elmozdulások a gerjesztések. A negyedjármű modellt a 2.1 ábra illusztrálja és az alábbiakban ennek a negyedjármű modellnek az egyenleteit akarjuk felírni. A mozgásegyenletek felírása a Lagrange egyenleten keresztül történik.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T(q,\dot{q})}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T(q,\dot{q})}{\partial q} + \frac{\partial D(\dot{q})}{\partial \dot{q}} + \frac{\partial U(q)}{\partial q} = f, \tag{2.1}$$

ahol $T(q,\dot{q})$, $U(q)$, $D(\dot{q})$ a kinetikai, potenciális és disszipatív energiák, míg f külső erők vektora.

Az egyenlet az $i = 1,2,...,m$ koordináták irányában felbontható:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T(q,\dot{q})}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T(q,\dot{q})}{\partial q_i} + \frac{\partial D(\dot{q})}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial U(q)}{\partial q_i} = f_i. \tag{2.2}$$



2.1. ábra. Negyedjármű modell

Esetünkben $q_1 = z_s$, $q_2 = z_u$ jelöléssel:

$$T = \frac{1}{2} m_s \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_u \dot{q}_2^2, \tag{2.3}$$

$$U = c_s \frac{(q_1 - q_2)^2}{2} + c_t \frac{(q_2 - w)^2}{2}, \tag{2.4}$$

$$D = k_s \frac{(\dot{q}_1 - \dot{q}_2)^2}{2}, \tag{2.5}$$

azaz egy két-szabadságfokú negyedjármű modell mozgásegyenletei a következők:

$$m_s \ddot{z}_s + k_s(\dot{z}_s - \dot{z}_u) + c_s(z_s - z_u) = f \tag{2.6}$$

$$m_u \ddot{z}_u - k_s(\dot{z}_s - \dot{z}_u) - c_s(z_s - z_u) + k_t(\dot{z}_u - \dot{z}_r) + c_t(z_u - z_r) = -f \tag{2.7}$$

Mátrixos alakba átírva kapjuk, hogy:

$$M\ddot{z} + D\dot{z} + Kz = Gz_r + Ff \tag{2.8}$$

ahol $z = \begin{bmatrix} z_s \\ z_u \end{bmatrix}$ és az egyes mátrixok alakjai

$$M = \begin{bmatrix} m_s & 0 \\ 0 & m_u \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} k_s & -k_s \\ -k_s & k_s \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 0 \\ c_t \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} c_s & -c_s \\ -c_s & c_s + c_t \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Egy negyedjármű modell állapottér reprezentációja a következő:

$$\dot{x} = Ax + B_1\dot{z}_r + B_2 f \tag{2.9}$$

ahol $x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix}^T$ az állapotvektor és

- $x_1 = z_s - z_u$ a felfüggesztés relatív elmozdulása,
- $x_2 = \dot{z}_s$ a rugózott tömeg sebessége,
- $x_3 = z_u - z_r$ a kerék elmozdulás,
- $x_4 = \dot{z}_u$ a rugózatlan tömeg sebessége.

Végül az állapotmátrixok alakja a következő lesz:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -\frac{c_s}{m_s} & -\frac{k_s}{m_s} & 0 & \frac{k_s}{m_s} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{c_s}{m_u} & \frac{k_s}{m_u} & -\frac{c_t}{m_u} & -\frac{k_s}{m_u} \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ \frac{k_t}{m_u} \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m_s} \\ 0 \\ -\frac{1}{m_u} \end{bmatrix}$$

A csillapítás nélküli negyedjármű modell ($M\ddot{z} + Kz = 0$) alapján két sajátfrekvenciát határozhatunk meg (ω_1 és ω_2):

$$\det(-\omega^2 M + K) = 0 \tag{2.10}$$

ahol $M = \begin{bmatrix} m_s & 0 \\ 0 & m_u \end{bmatrix}$ és $K = \begin{bmatrix} c_s & -c_s \\ -c_s & c_s + c_t \end{bmatrix}$, azaz

$$\det \begin{bmatrix} c_s - m_s\omega^2 & -c_s \\ -c_s & c_s + c_t - m_u\omega^2 \end{bmatrix} = 0$$

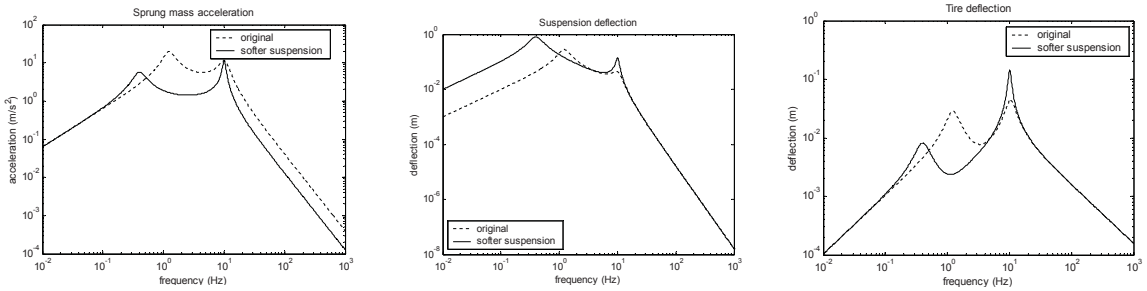
aminek megoldása:

$$\omega^2 = \frac{c_t + c_s}{2m_u} + \frac{c_s}{2m_s} \pm \frac{\sqrt{(c_t + c_s)^2 m_s^2 + m_u^2 c_s^2 - 2(c_t - c_s)c_s m_u m_s}}{2m_u m_s}$$

A sajátfrekvenciák közelítő értékei ekkor:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{c_s}{m_s}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{c_t}{m_u}} \quad \Rightarrow \quad f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi}, \quad f_2 = \frac{\omega_2}{2\pi}.$$

DOI: 10.15477/SZE.MMTDI.2017.007



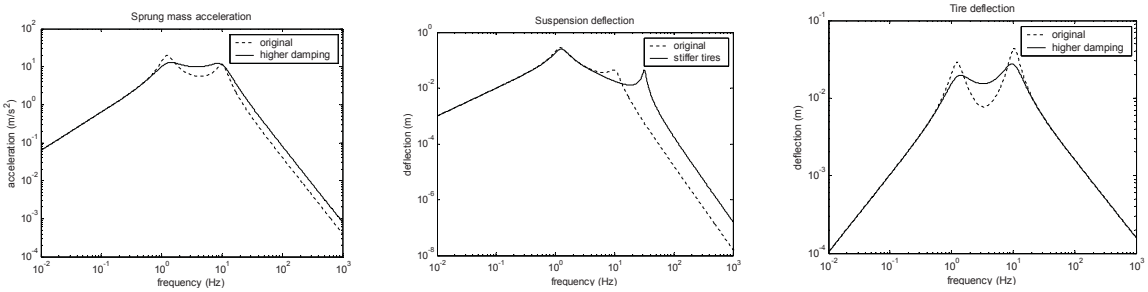
2.2. ábra. A c_s rugóállandó hatása

Az útgerjesztés hatása a rugózott tömegre (utazási kényelemre) és a tömegek közötti munkatérre a következő:

$$\frac{z_s}{z_r} = \frac{\frac{c_t}{m_u}\left(\frac{k_s}{m_s}s + \frac{c_s}{m_s}\right)}{s^4 + s^3\left(\frac{k_s}{m_s} + \frac{k_s}{m_u}\right) + s^2\left(\frac{c_s}{m_s} + \frac{c_s}{m_u} + \frac{c_t}{m_u}\right) + s\left(\frac{k_s}{m_s}\frac{c_t}{m_u}\right) + \frac{c_s}{m_s}\frac{c_t}{m_u}}, \tag{2.11}$$

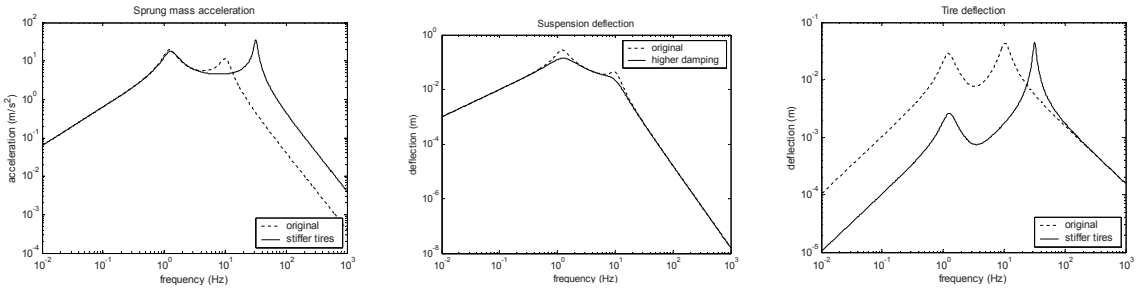
$$\frac{z_s - z_u}{z_r} = \frac{-\frac{c_t}{m_u}s^2}{s^4 + s^3\left(\frac{k_s}{m_s} + \frac{k_s}{m_u}\right) + s^2\left(\frac{c_s}{m_s} + \frac{c_s}{m_u} + \frac{c_t}{m_u}\right) + s\left(\frac{k_s}{m_s}\frac{c_t}{m_u}\right) + \frac{c_s}{m_s}\frac{c_t}{m_u}}. \tag{2.12}$$

A felfüggesztés c_s rugóállandójának redukálása csökkenti az ω_1 sajátfrekvencia értékét, míg a felfüggesztés k_s csillapítási tényezőjének növelése ezen a sajátfrekvencián jobb csillapítást ad. A munkatérre való hatás az, hogy az első sajátfrekvencián a felfüggesztési munkatérre vonatkozó átviteli függvény kisebb. A kerék rugóállandójának (c_t) növelése javítja a frekvencia képet a második sajátfrekvencia (ω_2) tartományában. Ennek hatása az, hogy redukálja a kerékelmozdulásra vonatkozó frekvencia függvényt az alacsonyabb frekvencia tartományban. Az egyes paraméterek hatását az egyes átviteli függvények frekvenciaképére szemléltetik a 2.2, a 2.3 illetve a 2.4 ábrák.



2.3. ábra. A k_s csillapítási tényező hatása

DOI: 10.15477/SZE.MMTDI.2017.007



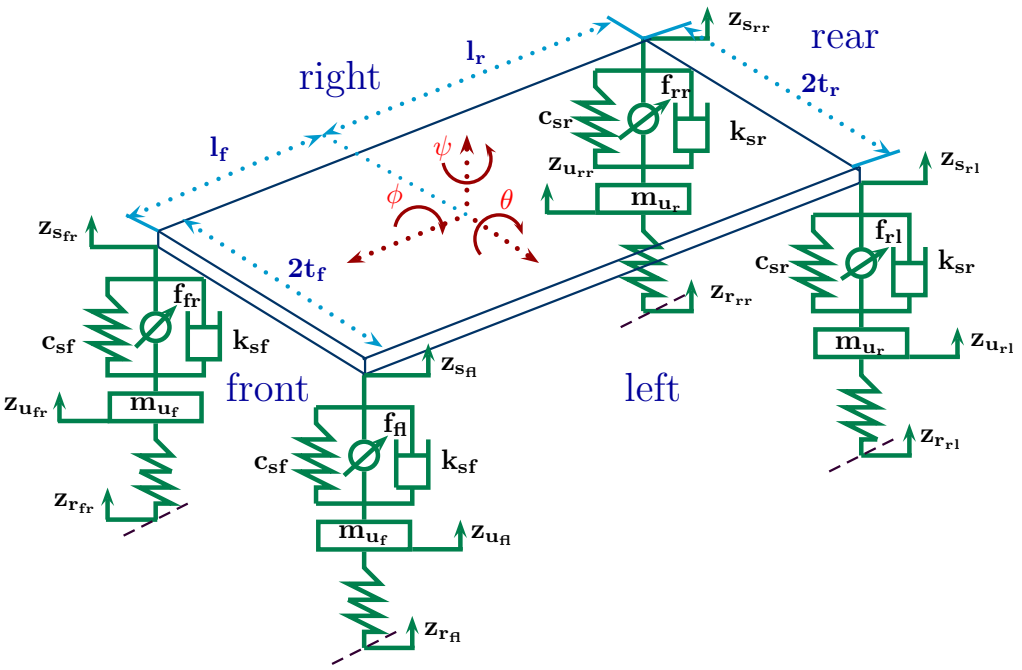
2.4. ábra. A c_t rugóállandók hatása

A teljes jármű vertikális dinamikájának modellje egy hét szabadságfokú modellhez vezet, lásd a 2.5 ábrát. A mozgásegyenletek:

$$M_s\ddot{q} = LB_s(\dot{x}_u - \dot{x}_s) + LK_s(x_u - x_s) - Lf \tag{2.13}$$

$$M_u\ddot{x}_u = B_s(\dot{x}_s - \dot{x}_u) + K_s(x_s - x_u) + K_t(w - x_u) + f \tag{2.14}$$

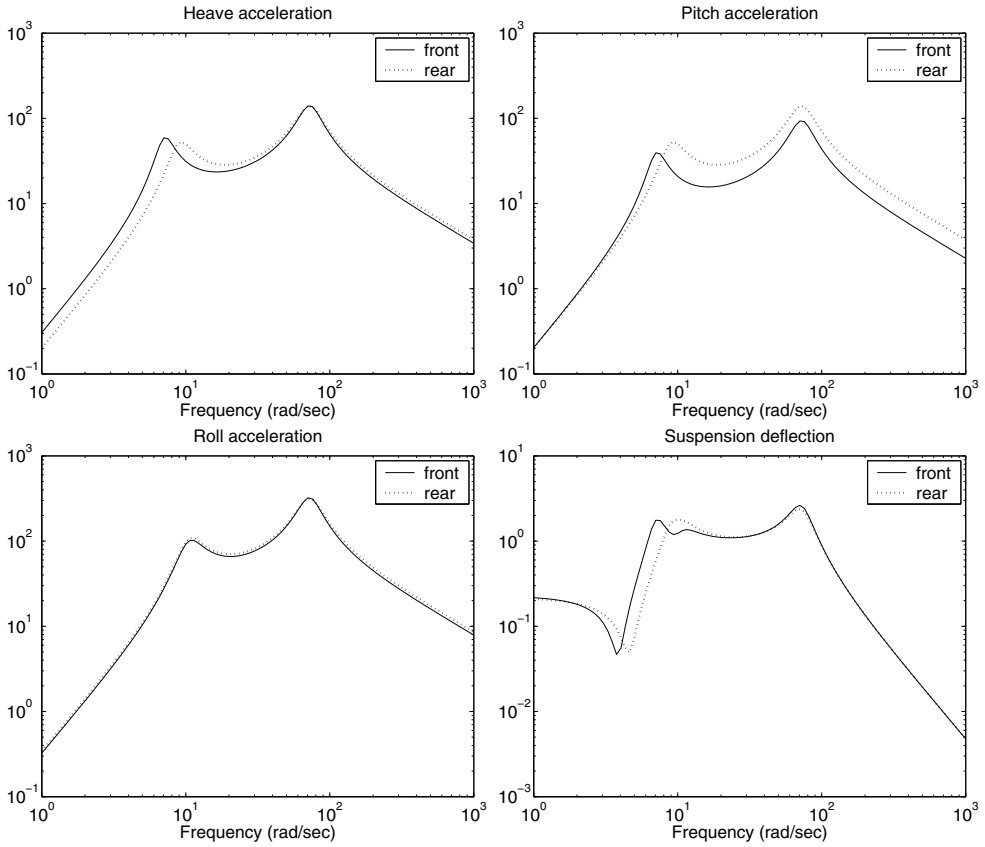
ahol M_s a rugózott tömeg, M_u a rugózatlan tömegek, K_s a felfüggesztési rugóállandó, K_t a kerék rugóállandó, B_s a felfüggesztési csillapítás, L a geometria mátrix.



2.5. ábra. Teljes jármű modellje

Ekkor az egyes jelek az alábbi vektorokba vannak gyűjtve:

$$z_s = \begin{bmatrix} z_{s_{fl}} & z_{s_{fr}} & z_{s_{rl}} & z_{s_{rr}} \end{bmatrix}^T, \quad z_u = \begin{bmatrix} z_{u_{fl}} & z_{u_{fr}} & z_{u_{rl}} & z_{u_{rr}} \end{bmatrix}^T,$$
$$z_r = \begin{bmatrix} z_{r_{fl}} & z_{r_{fr}} & z_{r_{rl}} & z_{r_{rr}} \end{bmatrix}^T, \quad f = \begin{bmatrix} f_{fl} & f_{fr} & f_{rl} & f_{rr} \end{bmatrix}^T.$$



2.6. ábra. A teljes jármű rugózott tömegének az útgerjesztésre adott frekvencia válasza

2.2. Útgerjesztés modellezése

A gépjárműre ható gerjesztés elsődleges forrása maga az útpálya felülete. Az útpálya egyenetlenségét alapvetően sztochasztikus és véletlenszerű komponensek alkotják, amire rárakódnak az általában rövid ideig tartó egyszeri zavarásból származó determinisztikus komponensek. Az útpálya modellezésének célja olyan jel generálása, amely jól reprezentálja az útpálya felületét, s így a tervezés eredményeként kapott szabályozó szimulációs vizsgálatában felhasználható. Az útpálya modellezésével már évtizedek óta többen foglalkoznak, példaként itt csak néhány tudományos dolgozatot említünk meg [13, 42, 32, 44, 21].

2.2.1. Determinisztikus útgerjesztés

Az útgerjesztés determinisztikus modellezése tipikus időtartományi analízisek során. Ilyenkor egy adott útprofillal jellemezzük az útgerjesztést, például:

téglalap alakú bukkanó:

$$z(x,y) = \begin{cases} H & \text{ha } 0 < x < L \text{ és } -\frac{1}{2}B < y < \frac{1}{2}B, \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases} \tag{2.15}$$

koszinusz alakú bukkanó:

$$z(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}H(1-\cos(2\pi\frac{x}{L})) & \text{ha } 0 < x < L \text{ és } -\frac{1}{2}B < y < \frac{1}{2}B, \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases} \tag{2.16}$$

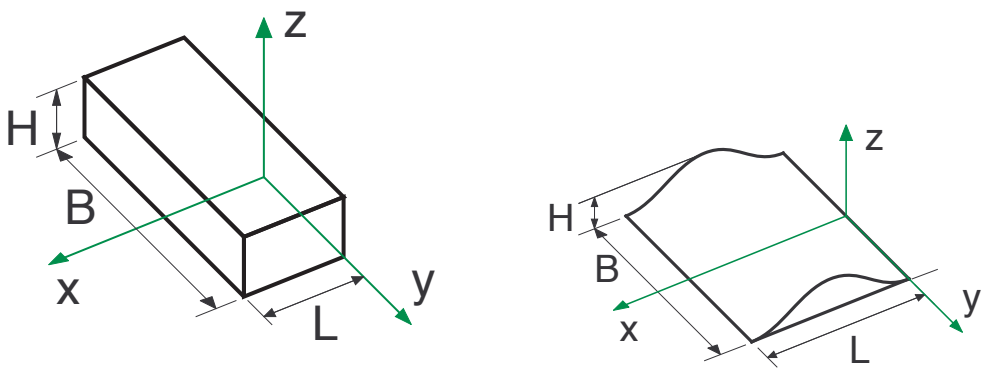
Egy kicsit összetettebb útgerjesztési modellt kaphatunk elemi komponensek összegzésével, ahol egy elemi harmonikus komponens például:

$$z_1(s) = A\sin(\Omega s) \tag{2.17}$$

$$z_2(s) = A\sin(\Omega s - \Psi). \tag{2.18}$$

Ezekben az összefüggésekben:

- s ívhossz ($\frac{ds}{dt} = v$)
- Ω hullámszám (wave number)
- $L = \frac{2\pi}{\Omega}$ hullámhossz
- Ψ a jobb és baloldali keréknyom közötti fáziseltolódás.



2.7. ábra. Bukkanó modellezése

Lényeges elem a modellben a gerjesztési frekvencia:

$$\Omega s = \frac{2\pi}{L} vt = 2\pi \frac{v}{L} t = \omega t \tag{2.19}$$

ahol $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{v}{L}$ a gerjesztési frekvencia. A legtöbb jármű esetén a $5Hz \leq f \leq 15Hz$ választás alkalmas lehet. Azonban vegyük észre, hogy ha $L = 4$ m, akkor az ehhez tartozó sebességnek $v_{min} = 2m/s = 7.2km/h$ és $v_{max} = 60m/s = 216km/h$ között kellene változni. Így a teljes tartományban való gerjesztéshez változó hullámhossz szükséges kis sebességeknél.

2.2.2. Sztochasztikus útgerjesztés

A sztochasztikus útprofil-folyamatok modellezésénél feltételezzük, hogy a járműkerekek az úttest mindenkori középvonalával párhuzamosan haladnak. Egy mérőkerék rögzített v haladási sebesség mellett történő végigvezetése az útfelületen, egy ω_n elemi eseményt eredményez, amelynek szemléletes megfeleltetése az, hogy a keréktalppont egy meghatározott távolságra halad az úttest középvonalával párhuzamosan. Az ω_n elemi eseményhez a keréktalpponton fellépő $\xi(t, \omega_n)$ útprofil gerjesztés tartozik, amely a sztochasztikus folyamat egy realizációja és ez a t időparamétertől függő függvény.

Adott úttípusra a sztochasztikus útprofil folyamat, a $\xi(t, \omega)$ realizációk összességéből áll. Itt t befutja a felmérés $[0, T]$ időintervallumát és $\omega \in \Omega$, ahol Ω az elemi események halmazát jelöli.

A jármű lengőrendszerek irodalmában elfogadott feltételezés, hogy a sztochasztikus útprofil folyamatok Gauss–folyamatok és másodrendig bezárólag stacionáriusak. Gyakran élnek továbbá azzal a kiegészítő megkötéssel, hogy a sztochasztikus útprofil folyamatok másodrendig bezárólag még ergodikusak is.

Frekvencia tartományi analízisek során tipikus, hogy sztochasztikus útgerjesztési modelleket használunk.

Emlékeztetőül, egy stacioner Gauss folyamat jellemző paraméterei a zérus átlag és σ szórás, azaz

$$m = \mathrm{E}(z(s)) = \lim_{X \to \infty} \frac{1}{X} \int_{-\frac{X}{2}}^{\frac{X}{2}} z(s) ds = 0 \tag{2.20}$$

és

$$\sigma^2 = \mathrm{E}(z^2(s)) = \lim_{X \to \infty} \frac{1}{X} \int_{-\frac{X}{2}}^{\frac{X}{2}} z^2(s) ds. \tag{2.21}$$

A sűrűség függvény alakja ilyenkor:

$$p(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}} \tag{2.22}$$

$$P(\pm\xi) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\xi}^{\xi} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}} dz \tag{2.23}$$

ahol $P(|z| < \sigma) = 0.683, P(|z| < 2\sigma) = 0.955, P(|z| < 3\sigma) = 0.997$. A megfelelő kovariancia-függvények pedig az alábbiak szerint számolhatók:

$$R(\xi) = \mathrm{E}(z(s)z(s+\xi)) = \lim_{X\to\infty} \frac{1}{X} \int_{-\frac{X}{2}}^{\frac{X}{2}} z(s)z(s+\xi)ds \tag{2.24}$$

$$R(0) = \sigma^2 \qquad R(\xi \to \infty) = 0 \qquad R(\xi) = R(-\xi). \tag{2.25}$$

Megjegyzendő, hogy ha a folyamat tartalmaz egy periodikus komponenst, akkor az megmutatkozik $R(\xi)$ értékében.

Az útprofilokat frekvencia tartományban általában a spektrális sűrűségfüggvény (teljesítménysűrűség spektrum) segítségével jellemzik:

$$S(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R(\xi) e^{-i\Omega\xi} d\xi \qquad R(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\Omega) e^{i\Omega\xi} d\Omega. \tag{2.26}$$

Az egyoldali spektrális sűrűségfüggvény főbb jellemzői:

$$\Phi(\Omega) = \begin{cases} 2S(\Omega) & \text{ha } \Omega \geq 0 \\ 0 & \text{ha } \Omega < 0 \end{cases} \tag{2.27}$$

$$S(\Omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} R(\xi) \cos(\Omega\xi) d\xi \tag{2.28}$$

$$\sigma^2 = R(0) = \int_0^{\infty} \Phi(\Omega) d\Omega \tag{2.29}$$

Gyakran élünk a

$$\sigma^2 \approx \sum_{i=1}^{N} \Phi(\Omega_i) \frac{\Omega_N - \Omega_1}{N} \tag{2.30}$$

közelítéssel.

Ezt felhasználva a spektrális sűrűségfüggvény közelítése:

$$\Phi(\Omega) \approx \Phi(\Omega_0) (\frac{\Omega}{\Omega_0})^{-w} \tag{2.31}$$

Például az ISO 8608 szabvány szerint ezek a paraméterek:

$$\Omega_0 = 1,\ rad/m, \quad w = 2, \tag{2.32}$$

és $\Phi_0 = 10^{-6}\ m^2/(rad/m)$ sima út esetén, valamint $\Phi_0 = 256\ 10^{-6}\ m^2/(rad/m)$ göröngyös, rázós út esetén.

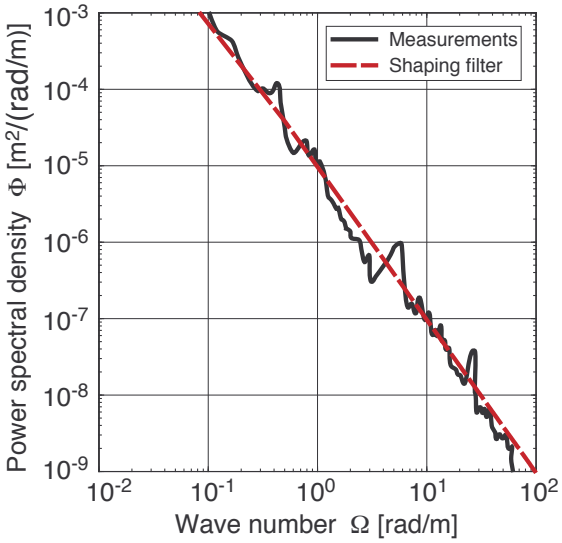
Véletlenszerű szinuszos profilok szuperpozíciójával kaphatunk komplex útgerjesztéseket:

$$z(s) = \sum_{i=1}^{N} A_i \sin(\Omega_i s - \Psi_i) \tag{2.33}$$

$$\sigma^2 = \lim_{X\to\infty} \frac{1}{X} \int_{-\frac{X}{2}}^{\frac{X}{2}} (\sum_{i=1}^{N} A_i \sin(\Omega_i s - \Psi_i))^2 ds = \tag{2.34}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} A_i^2, \qquad A_i = \sqrt{2\Phi(\Omega_i)\frac{\Omega_N - \Omega_1}{N}} \tag{2.35}$$

2.2.3. Útprofilok szimulációja



2.8. ábra. Spektrális sűrűségfüggvény közelítése

Szimulációk során célszerűbb az útgerjesztés valamilyen dinamikus modell segítségével előállítani, amit például fehér zaj gerjeszt.

Útgerjesztés egytárolós modell segítségéve:

$$\frac{d}{ds} z(s) = -\gamma z(s) + w(s), \tag{2.36}$$

$$\gamma = \alpha v \tag{2.37}$$

$$\Phi_z = \frac{\Phi_w}{\gamma^2 + \Omega^2} = H(\Omega)\Phi_w H^T(-\Omega) \tag{2.38}$$

Útgerjesztés harmadrendű modellre alapozva:

$$z^{(3)} + \alpha_1 \ddot{z} + \alpha_2 \dot{z} + \alpha_3 z = w. \tag{2.39}$$

Az α_i paraméterek ekkor a jármű sebességének és az út minőségének függvényei (Hack modellek).

2.3. Elhanyagolt dinamika szerepe

A valódi rendszer modelljének pontos alakja a gyakorlati feladatokban nem ismert, s emiatt helyette annak közelítő, úgynevezett névleges (nominális) modelljét használjuk. A modell és a valós rendszer közötti eltérést okozó hatások modellezésekor célszerű megkülönböztetni az állandóan jelen levő modell bizonytalanságot a külső zavarástól. Zavarások körébe tartozik tipikusan a rendszerre ható külső zavarás, az irányítójel hibája, a mérési zaj. Modell bizonytalanság a modellben meglévő parametrikus bizonytalanságok és a nem modellezett dinamika hatása. Az irányítás célja stabilitás és performancia garantálása adott nagyságú feltételezett modell bizonytalanság mellett.

Kétféle modell bizonytalanságot különböztethetünk meg: struktúrális és struktúrálatlan modell bizonytalanságot. A struktúrált bizonytalanság modellezésekor a bizonytalansági blokk struktúrálása (például blokk-diagonális) növelheti a modell pontosságát és használhatóságát az irányítás-tervezés szempontjából. Tipikusan struktúrált a grey-box modellezés során kapott modellben előforduló paramétereknek a bizonytalansága: a paraméter értéke pontosan nem ismert, de a bizonytalanság mértéke általában jól becsülhető.

A valódi rendszer modelljének pontos alakja a gyakorlati feladatokban nem ismert, s emiatt helyette annak közelítő, névleges modelljét használjuk. Az eltérés okai:

- egyrészt modellezési eljárás következménye (pl. a felharmonikusokat, illetve a magasabb fokszámú együtthatókat elhanyagoljuk, merev test alapú modellezés flexibilis modellezés helyett, munkapont körüli linearizálás),
- másrészt a rendszer működése során bekövetkező változások (pl. a normál üzem során a modell paraméterei változnak, az anyag kifáradás során változnak a rendszer paraméterei, sőt akár a struktúrája).
- rugózott tömeg változik az utasok tömegének módosulásával,
- a felfüggesztés rugó vagy csillapítás karakterisztikája módosul (pl. nemlineáris hatások vannak),
- kerékabroncs dinamikája változik.

Számos alkalmazásnál a rendszerben fellépő nemlinearitás pontatlanul ismert vagy akár ismeretlen. Tipikus nemlinearitások a szaturáció, súrlódás, holtsáv, kotyogás, hiszterézis.

A negyedjármű modellt impulzus függvény gerjesztéssel vizsgálva jól látható a nemlineáris és a linearizált modell közötti különbség.

A modell és a rendszer közötti hiba meghatározására általános megoldás nincs, különböző szerkezetű lehetőségek közül az additív, illetve a multiplikatív hiba struktúra a legismertebb.

A $G(s)$ aktuális rendszer és a $G_N(s)$ névleges rendszer közötti eltérést additív hiba struktúrának nevezzük, ha a következő összefüggés teljesül:

$$G(s) = G_N(s) + \Delta_A(s), \tag{2.40}$$

ahol $\Delta_A(s)$ az additív hiba átviteli függvénye. Az additív hiba ismeretlen.

A $\Delta_A(s)$ ismeretlen méretű additív hiba átviteli függvényt egy ismert korláttal rendelkező Δ bizonytalansággal kifejezhetjük és frekvencia függvényét Nyquist diagramon ábrázolhatjuk:

$$\Delta_A(s) = \Delta(s)w(s), \tag{2.41}$$

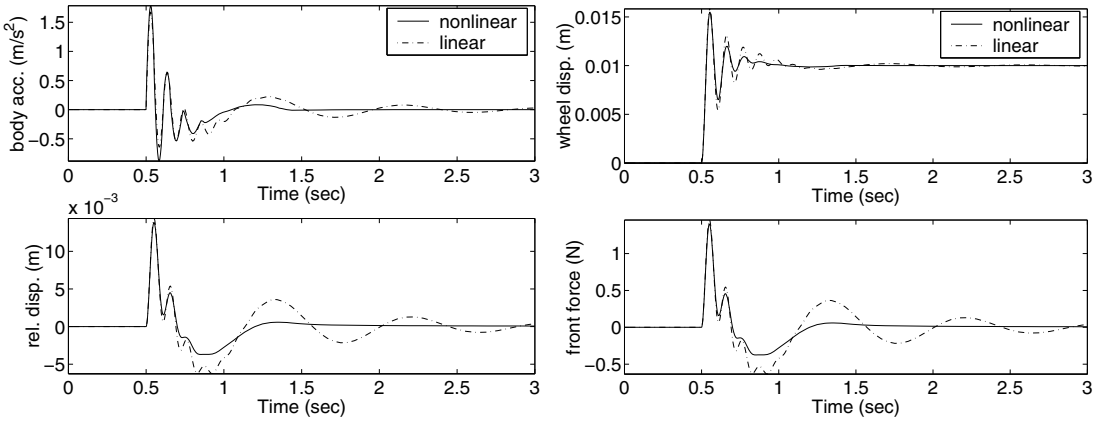
ahol w skalár függvény. Az aktuális $G(i\omega)$ rendszer Nyquist diagramja a névleges $G_N(i\omega)$ rendszer Nyquist diagramjával és a bizonytalanságot leíró $w(i\omega)$ függvénynyel illusztrálható.

A $G(s)$ aktuális rendszer és a $G_N(s)$ névleges rendszer közötti eltérést multiplikatív hiba struktúrájúnak nevezzük, ha a következő összefüggés teljesül:

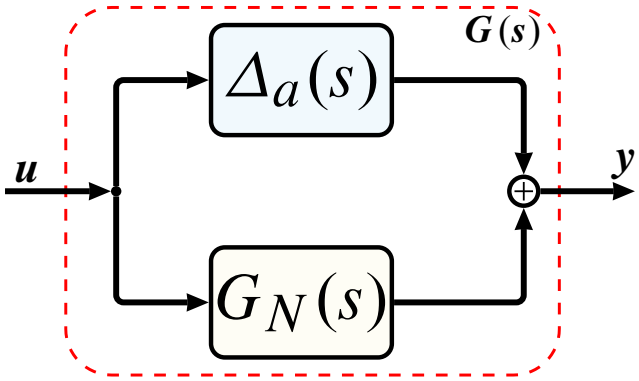
$$G(s) = G_N(s)(1 + \Delta_M(s)),$$

ahol $\Delta_M(s)$ a multiplikatív hiba átviteli függvénye.

A $\Delta_M(s)$ ismeretlen méretű additív hiba átviteli függvényt egy ismert korláttal rendelkező Δ



2.9. ábra. Lineáris és nemlineáris rendszerek összehasonlítása

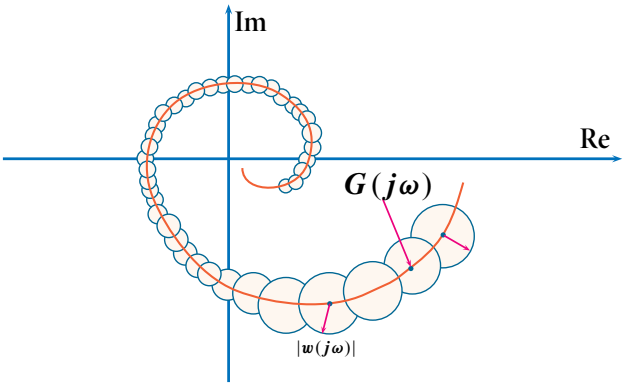


2.10. ábra. Az additív bizonytalanság struktúrája

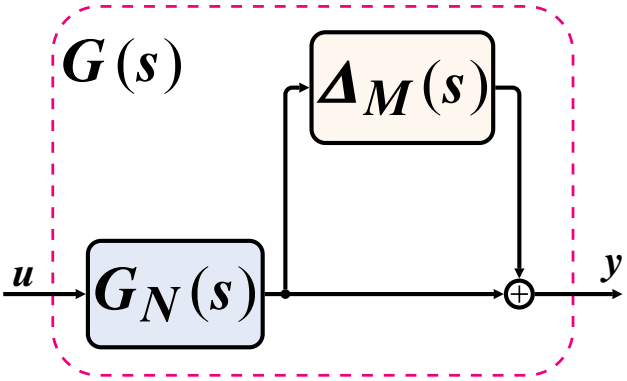
bizonytalansággal kifejezhetjük és frekvencia függvényét Bode diagrammon ábrázolhatjuk:

$$\Delta_M(s) = \Delta(s)w(s), \tag{2.42}$$

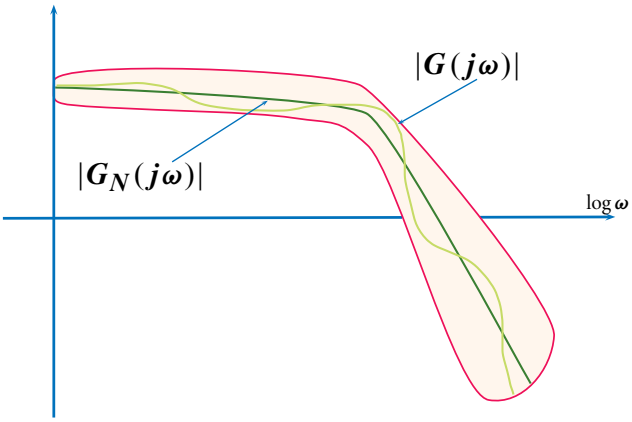
ahol w skalár függvény. Az aktuális $G(i\omega)$ rendszer Bode diagramja a névleges $G_N(i\omega)$ rendszer Bode diagramjával és a bizonytalanságot leíró $w(i\omega)$ függvénnyel illusztrálható.



2.11. ábra. Bizonytalanság a Nyquist diagramon



2.12. ábra. A multiplikatív bizonytalanság struktúrája



2.13. ábra. Bizonytalanság a Bode diagramon

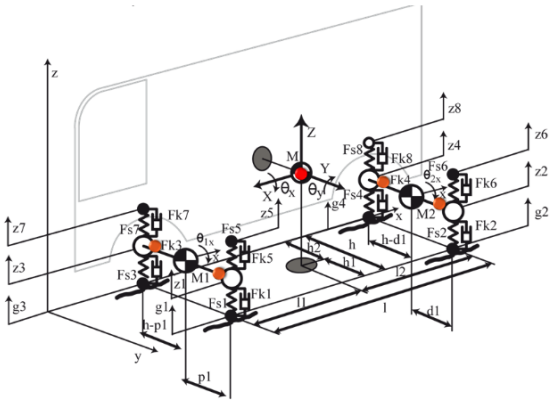
DOI: 10.15477/SZE.MMTDI.2017.007

3. Kísérleti körülmények leírása

A Széchenyi István Egyetemen Járműipari Kutatóközpont, a Kisalföld Volán Zrt. és munkatársai segítségével egy kéttengelyes autóbusszal történő egynapos méréssorozatot folytattunk le. Az egy napos méréssorozatot egy mérőrendszer installálás előzött meg. A mérések célja az autóbusz menetdinamikai jellemzőinek megismeréséhez alapot szolgáltató több ponton mért gyorsulás-jelek rögzítése volt különböző menetviszonyok között.

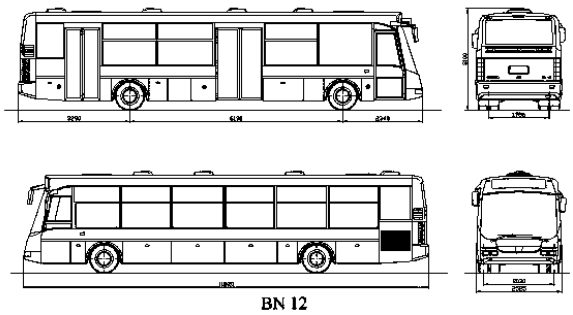
A mérési céloknak megfelelően kiválasztott autóbusz típusa CREDO BN 12 (SOLO autóbusz) volt. Az autóbuszon gyorsulásérzékelők az alábbi mérési elrendezésben kerültek rögzítésre:

- tengelycsonkonként Z tengelyirányú gyorsulás jeladók (négy darab) – az ábrán narancssárga színnel jelölve,
- az autóbusz súlypontjában X, Y, Z tengelyirányú gyorsulás jeladó (egy darab három tengelyes, vagy három darab egy tengelyes) – az ábrán piros színnel jelölve
- a kocsiszekrényen az $5, 6, 7$ koordinátapontokon egy-egy függőleges gyorsulásadó, a tengelycsonkokhoz telepítettekkel azonos, Z tengelyirányban.



3.1. ábra. A mérőrendszer mérési pontjai a autóbusz mechanikai modelljén

DOI: 10.15477/SZE.MMTDI.2017.007



3.2. ábra. A méréshez használt autóbusz jellegrajza és méretei

3.1. A mérés bemutatása

3.1.1. A méréshez használt autóbusz adatai

A Credo BN 12 autóbusz a mosonmagyaróvári Kühne Zrt. és a győri Kravtex Kft. autóbusz gyártó városi közlekedésre szánt, alacsony belépésű típuscsaládjának $11,8\ m$ hosszú változata. Három utas ajtóval rendelkezik. A típusból 72 darab készült amelyből a Kisalföld Volán Zrt. és jogutódja az Északnyugat-magyarországi Közlekedési Központ Zártkörűen működő Részvénytársaság 28 darabot üzemeltet.

Fontos megjegyezni, hogy a mérést végző kollégáimmal a felkészülés és mérés technikai kivitelezésénél az autóbusz egységeit nem bontottuk meg, nem károsítottuk, nem módosítottuk. Az autóbuszt a mérés végén, a mérést megelőző eredeti állapotában adtuk át. Az autóbusz mérésre való felkészítését és a mérést a Kisalföld Volán Zrt. szakemberei konzultatív felügyelték , illetve a járművet a Kisalföld Volán Zrt. járművezetője, illetve felhatalmazottja vezette.

3.1. táblázat. CREDO BN 12 autóbusz

Menetkész tömeg	8975–9075 kg
Tengelytávolság	6190 mm
Nyomtáv elöl	2030 mm
Nyomtáv hátul	1786 mm
Max. tömeg	16500 kg

Az autóbusz vázszerkezetét önhordó karosszéria adja, a kocsiszekrény teljes egészében zárt keresztmetszetű, acélprofilból hegesztett. A padlóváz, a motortartó nyúlványok kivételével teljes egészében korrózió álló anyagból készült. A külső burkolat: cink bevonatos előre lakkozott feszített acéllemez, mely ragasztással és ponthegesztéssel került rögzítésre az oldalvázhoz. A feszített lemez alatt alumínium keretre ragasztott üvegszál erősítésű műanyag burkoló elemek

DOI: 10.15477/SZE.MMTDI.2017.007

3.2. táblázat. Súlyponti helyzetek a menetkész autóbuszra

X "A" tengelytől	4220 mm
Y középtől (utasajtók felé)	6 mm
Z talajtól	862 mm

3.3. táblázat. Főbb méretek

Hosszúság:	11820 mm
Szélesség:	2525 mm
Magasság:	3100 mm
Tengelytávolság "A"–"B":	6190 mm
Mellső túlnyúlás:	2340 mm
Hátsó túlnyúlás:	3290 mm
Fordulókör átmérő:	n.a.

találhatóak. Belső burkolat: a tető és az oldalfal polisztirol lappal hőszigetelt, mely hőszigetelő lapok ragasztással rögzítettek a külső burkolathoz; a tető és az oldalfalak belső borítása kopásálló felülettel ellátott laminált lemez.

Az autóbusz felépítményének belépési magassága a normál szintnél 350 mm volt, az alacsony szintnél pedig 350 mm. Az autóbusz megengedett legnagyobb össztömege 16500 kg, az ehhez tartozó tengelyterhelés az "A" tengelyen 5800 kg, míg a "B" tengelyen 11700 kg.

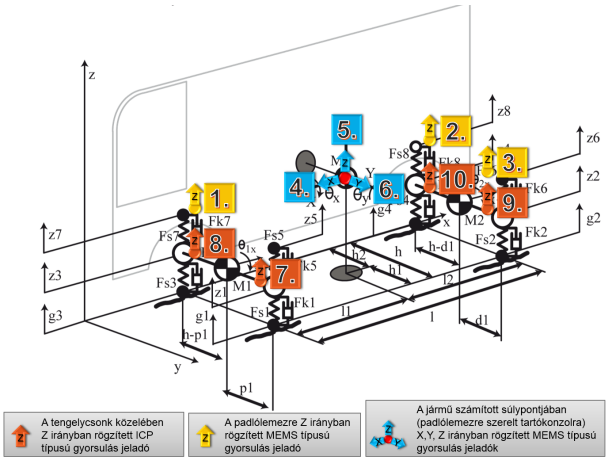
Főegységek tekintetében a motor típusa IVECO F4AE0682H*C EURO 4, lökettérfogata 5880 cm^3, teljesítménye 194 kW (260 LE) 2500 ford/perc, nyomatéka pedig 930 Nm az 1250–1950 ford/perc tartományban. Az autóbuszok Allison T280R automata sebességváltóval voltak felszerelve. A gumiabroncs illetve a keréktárcsa mérete $285/70R19,5$” illetve $7,5 \times R19,5$”. Futóművek: "A" tengely esetében SOR (trapéz lengőkaros független kerékfelfüggesztés) a "B" tengelyen pedig DANA $11-26$ (sajtolt, hegesztett merev hídház; egyfokozatú hypoid főhajtóművel). A felfüggesztés paraméterei: "A" tengelyen 2 darab, "B" tengelyen 4 darab légrugóval, valamint "A" tengelyen 2 darab, "B" tengelyen 4 darab hidraulikus lengéscsillapítóval. Kétkörös légfékrendszer működödött, minden tengelyen tárcsás fékszerkezettel, ASR-rel. A fékszelepek típusa KNORR BREMSE/WABCO, míg az ABS/ETC típusa WABCO.

Az autóbusz 3 darab távműködtetésű, kétszárnyú belső bolygó utasajtóval van felszerelve, és visszanyitó szerkezettel van ellátva. A második utasajtónál kihajtható rámpa található a kerekesszékes utasok részére. A szélvédő ragasztott biztonsági üveg, vázba ragasztással rögzítve, míg az oldalüvegek edzett, biztonsági üvegből vannak, vázba ragasztással rögzítve. A vezető melletti ablak alumínium keretbe épített és elhúzható. A hátsó szélvédő edzett biztonsági üveg, vázba ragasztással rögzítve. Az utastéri fűtést 5 darab légbefúvásos hőcserélő adja, a fűtőkészülék típusa Webasto. Az utastér légcseréjéről 2 darab Webasto tetőszellőző (mely egyben vészkijárat is) és a tetőre épített 4 darab ventillátor (3 befúvó, 1 elszívó) gondoskodik.

DOI: 10.15477/SZE.MMTDI.2017.007

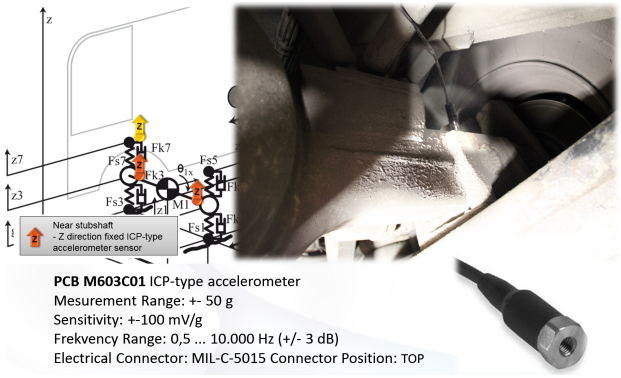
3.2. A mérés előkészítése

A Credo BN 12-es tipusú autóbuszt, amit járművezetővel együtt bocsájtották rendelkezésünkre, a Kisalföld Volán segítségével tudtunk használni a méréseinkhez. A 3.2 ábrán látható a jármű jellegrajza.



3.3. ábra. A 3D jeladók helye

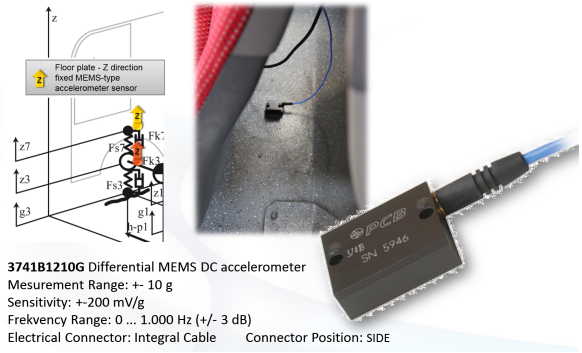
A 3.3 ábrán látható a jármű mechanikai modellje, ahol megjelölésre kerültek a mérőrendszer gyorsulási jeladói. Piros, számozott jelölésekkel (feliratozott nyilakkal) láthatóak a futóműre helyezett összesen 4 db PCB tipusú (piezo elven működő) jeladó, amelyeket a tengelycsonk közelében ragasztásos technológiával rögzítettünk “z” tengelyirányban. Ezen a jeladók segítségével tudtuk mérni a rugózatlan tömeg gyorsulását, lásd a 3.4 ábrát.



3.4. ábra. A PCB gyorsulás jeladó felszerelése az első tengelycsonk közelében

Az autóbusz padlólemezére mindösszesen hat darab MEMS tipusú jeladót rögzítettünk (szintén ragasztásos technológiával), a 3.5 ábra. Ebből hármat szintén “z” tengelyirányban a rugózatlan tömeg jeladói fölé a kerékjárati ívekre rögzítettünk (a hátulsó tengelyen jobb és bal oldalra, az első tengelyen jobb oldalra). A másik három jeladót a jármű számított súlypontjába helyeztük egy egyedi tartókonzol segítségével, mégpedig x, y, és z tengelyirányokba történő rögzítéssel, a 3.6 ábra.

DOI: 10.15477/SZE.MMTDI.2017.007

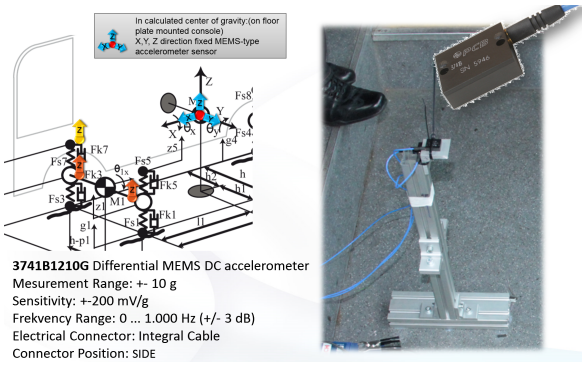


3.5. ábra. A MEMS gyorsulás jeladó felszerelése a padlólemezen

A szenzorok által adott jelet tíz csatornán keresztül gyűjtöttük a 3.7 ábrán látható NI CompactDAQ 8 slotos USB csatlakoztatású adatgyűjtő eszközzel. A szenzorokat speciálisan árnyékolt adatgyűjtő kábellel kötöttük össze a CompactDAQ egységgel. A gyűjtött adatokat a mérés során az USB csatlakozón keresztül összekötött hordozható személyi számítógépre (laptopra) mentettük. Ugyanezen ábrán látható az a személygépjármű akkumulátor, amely a mérőrendszer tápellátását biztosította. A 3.8 ábra fotóján látható a csatornák viszonylag nehezen átlátható bekötése a szenzorok azonosítását megkönnyítendő bilétás jelölésekkel.

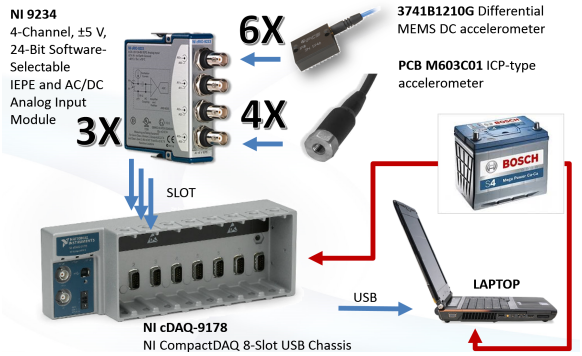
A tíz csatornás mérőrendszer mintavételi frekvenciáját igen magas, 20 kHz-es értékre állítottuk. Vizsgálataink ugyan nem igényelték ezt a sűrű mintavételezést, de a mérés előkészítés és a mérés összességében költséges folyamata, a jelentős ráfordított mérnökóra, illetve a későbbi, más célt szolgáló kutatások alapjához szükséges adatokra gondolva választottuk a 20 kHz-es értéket.

A trajektóriák felvételére egy külön, GPS alapú mérőrendszert építettünk a járműbe, ezzel segítve a jármű által bejárt útvonal szakaszok azonosítását, vizsgálathoz történő kiválasztását. Ezen mérőrendszernek is az előbbiekben bemutatott személygépjármű akkumulátor szolgálta a tápellátását. A GPS jel biztosítására a VBOX mérőeszközhöz egy a jármű karosszériáján kívülre rögzített GPS antennát rögzítettünk. Mindkét mérőrendszer esetén az adatrögzítésénél minden egyes szakasznál azonosító jelöléssel (idő, mérési metódus és szakasz) láttuk el az elmentendő

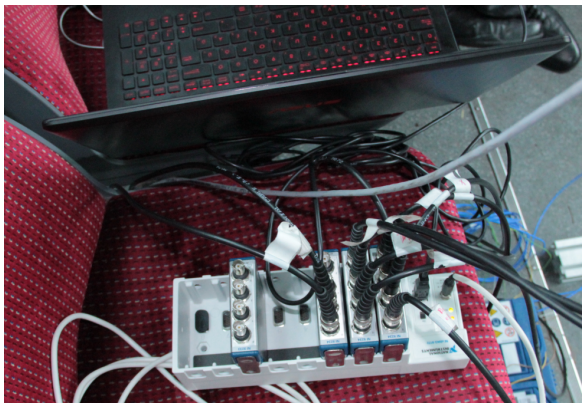


3.6. ábra. A 3 db (x, y, z tengely-irányban) felszerelt MEMS gyorsulás jeladó felszerelése a jármű számított súlypontjában

DOI: 10.15477/SZE.MMTDI.2017.007



3.7. ábra. A 10 csatornás gyorsulásmérés a teljes adatrögzítő rendszerrel



3.8. ábra. A mérőcsatornák bekötése az adatgyűjtő keretbe

adatfájlokat.

3.3. A gyorsulásmérő rendszer és az adatfájlokban beazonosított csatornái

A 3.4 táblázatban a gyorsulásjeladók azonosítása és az adatrögzítés eredménye képen létrejött adattáblák oszlop azonosítása látható. A csatornák sorszáma alapján beazonosítható az autóbuszon való elhelyezés. A táblázatban használt rövidítések:

1. MEMS - Microelectromechanical systems sensor,
2. ICP - Integrated circuit piezoelectric sensor.

3.4. Identifikációs mérések

Vizsgálataink alapjául két féle mérést végeztünk. Először egy meghatározott általunk kijelölt útpályán (a volántársaság járművezetők oktatására szolgáló területén) végeztünk méréseket, melyeknek az volt a célja, hogy viszonylag kevés járműdinamikai zajjal, fékezés, gyorsítás és

DOI: 10.15477/SZE.MMTDI.2017.007

3.4. táblázat. A gyorsulásmérő rendszer csatornái

Csat.	Adatgyűjtő kártya/csatorna:	Szenzor típusa:	Szenzor pozíciója:	Adatfájl munkalap (mintavételi frekvencia):	Adatfájl oszlop elnevezés:
1.	CDAQ MOD 1 / AI0	MEMS	padlólemez (doblemez), jobb, első	4 kHz	cDAQ1Mod1/ai0
2.	CDAQ MOD 1 / AI1	MEMS	padlólemez (doblemez), jobb, hátsó	4 kHz	cDAQ1Mod1/ai1
3.	CDAQ MOD 1 / AI2	MEMS	padlólemez (doblemez), bal, hátsó	4 kHz	cDAQ1Mod1/ai2
4.	CDAQ MOD 1 / AI3	MEMS	súlypontban, X tengely	4 kHz	cDAQ1Mod1/ai3
5.	CDAQ MOD 2 / AI0	MEMS	súlypontban, Y tengely	4 kHz	cDAQ1Mod2/ai0
6.	CDAQ MOD 2 / AI1	MEMS	súlypontban, Z tengely	4 kHz	cDAQ1Mod2/ai1
7.	CDAQ MOD 2 / AI2	ICP	tengelycsonk, bal, első	20 kHz	cDAQ1Mod2/ai2
8.	CDAQ MOD 2 / AI3	ICP	tengelycsonk, jobb, első	20 kHz	cDAQ1Mod2/ai3
9.	CDAQ MOD 3 / AI0	ICP	tengelycsonk, bal, hátsó	20 kHz	cDAQ1Mod3/ai0
10.	CDAQ MOD 3 / AI1	ICP	tengelycsonk, jobb, hátsó	20 kHz	cDAQ1Mod3/ai1

kanyarodás nélkül rögzíthessünk szakaszokat, mégpedig úgy, hogy az általunk kihelyezett akadályokkal ismert útgerjesztést adjunk a jármű rendszernek. A 3.10 ábrán látható az akadályok elhelyezése (bal oldali kép) és az áthaladás az egyik akadályon (jobb oldali kép). Az útgerjesztéshez két féle méretű (profilú) gerendát használtunk, melyeken elsőnek a bal oldali, majd a jobb oldali, majd együttesen mindkét oldali keréksorral kellett áthaladnia a járművezetőnek. A gerendák egymástól 35 méteres távolságra kerültek elhelyezésre. A sebességet a járművezető szabályozta, először 5 km/h, majd 15 km/h egyenletes tempóban kellett a szakaszon haladnia. Itt arra számítottunk, hogy a forgalmi mérésekhez képest “sterilebb” méréseket tudunk elvégezni.

3.9. ábra. Az akadályok elhelyezése (bal oldali kép) és az áthaladás (jobb oldali kép)

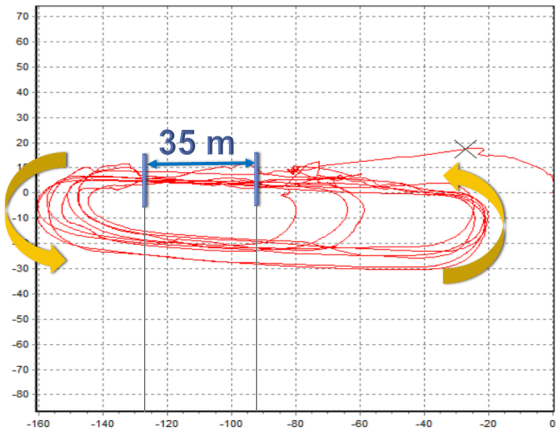
DOI: 10.15477/SZE.MMTDI.2017.007

Az identifikációs mérésekhez használt akadályok:

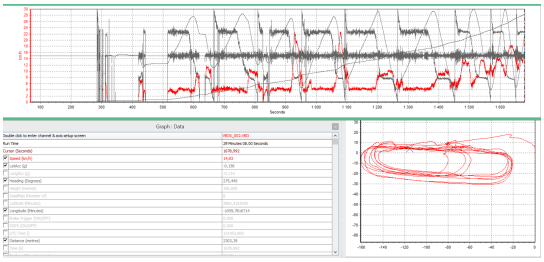
1. 58×38 mm
2. 78×58 mm

Az akadályokat egymástól 35 m-re kerültek elhelyezésre, melyen az autóbusz sorban az alábbiak szerint haladt át (az áthaladási sebesség a járművezető manuális szabályozásával megcélzott sebesség):

Sorszám	Áthaladási sebesség [km/h]	Mely kerekekkel haladt át az autóbusz az akadályokon
I.1.	5	Bal oldali kerekek
I.2.	5	Bal oldali kerekek
I.3.	5	Jobb oldali kerekek
I.4.	5	Jobb oldali kerekek
I.5.	5	Dupla keréksorral (bal és jobb oldali kerekek)
I.6.	5	Dupla keréksorral (bal és jobb oldali kerekek)
I.7.	15	Bal oldali kerekek
I.8.	15	Jobb oldali kerekek
I.9.	15	Bal és jobb oldali kerekek



3.10. ábra. Az identifikációs mérések alatt felvett útvonal (RaceLogic GPS alapú mérőműszer)



3.11. ábra. A RaceLogic saját programjába behívott adatok

DOI: 10.15477/SZE.MMTDI.2017.007

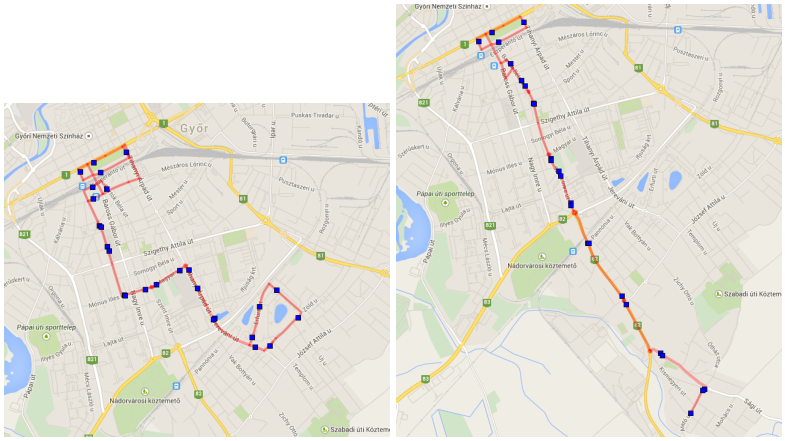
3.12. ábra. Menetrend

3.5. Forgalomban végzett mérések

Az előbbiekben bemutatott mérés után következtek a valós forgalmi mérések, ahol a volántársaság két járatvonalán haladtunk végig, normál menetben, betartva a KRESZ szabályait. Mindkét esetben, mindkét körben a kiindulási és a végpont is a Révai Miklós utcai végállomás volt.

A valós üzemhez képest a végállomások közötti buszmegállókba nem haladtunk be, illetve nem álltunk meg, hiszen a mérés és a kutatás célja ezeket az elemeket nem kívánta meg. Mindkét járat vonalán, indkét irányban kétszer haladtunk végig. A mérések során megállapítottuk, hogy a forgalom sűrűsége, a jelzőlámpák ütemezése, valamint a többi közlekedési résztvevő jelentősen befolyásolja (elsősorban) a jármű hosszdinamikáját (fékezések és gyorsítások). A bejárt útvonalak során rögzített jelből utólagosan kiválasztott szakaszokhoz tartozó részeket daraboltunk ki, amelyeket a vélt kisebb mértékű kereszt és hosszirányú menetdinamika alapján tudtunk meghatározni. Ezek a szakaszok adatait vetettem analízis alá.

A járatok útvonalán való végighaladás a következők szerint történt.



3.13. ábra. A 2-es és az 5-ös számú járat nyomvonala Győrben

Mindkét típusú méréssorozat alatt megfigyelhető volt a jármű felépítményének és annak elemeinek erős, motor és út által gerjesztett rezonanciája (és a vele járó zajhatás). Már itt sejthető volt, hogy a mért jelek ezekkel a rezonanciákkal jelentős zajt fognak tartalmazni, amit kezelni kell az analízisek során.

DOI: 10.15477/SZE.MMTDI.2017.007

3.5. táblázat. A járatok útvonalán való végighaladás

Forgalmi mérés / járat száma:	A járat iránya:	Indulás / érkezés	RaceLogic adatfájl	Gyorsulásmérő rendszer adatfájl
II.1. / 2	Révai Miklós utca - Zrínyi utca - Zöld utca, Szőnyi Márton utca	15:30 / 15:44	VBOX_004.VBO	Kisalfold_2014.10.17_15.30.32 _Kettes_menet1-1.tdms
II.2. / 2	Zöld utca, Szőnyi Márton utca - Zrínyi utca - Révai Miklós utca	15:47 / 16:03	VBOX_006.VBO	Kisalfold_2014.10.17_15.49.11 _Kettes_menet1-2.tdms
II.3. / 5	Révai Miklós utca - Kismegyer	16:05 / 16:24	VBOX_007.VBO	Kisalfold_2014.10.17_16.06.27 _Otos_menet1-1.tdms
II.4. / 5	Kismegyer - Révai Miklós utca	16:26 / 16:40	VBOX_008.VBO	Kisalfold_2014.10.17_16.27.27 _Otos_menet1-2.tdms
II.5. / 2	Révai Miklós utca - Zrínyi utca - Zöld utca, Szőnyi Márton utca	16:53 / 17:08	VBOX_009.VBO	Kisalfold_2014.10.17_16.54.05 _Kettes_menet2-1.tdms
II.6. / 2	Zöld utca, Szőnyi Márton utca - Zrínyi utca - Révai Miklós utca	17:09 / 17:26	VBOX_010.VBO	Kisalfold_2014.10.17_17.10.45 _Kettes_menet2-2.tdms
II.7. / 5	Révai Miklós utca - Kismegyer	17:28 / 17:41	VBOX_011.VBO	Kisalfold_2014.10.17_17.27.44 _Otos_menet2-1.tdms
II.8. / 5	Kismegyer - Révai Miklós utca	17:43 / 17:56	VBOX_012.VBO	Kisalfold_2014.10.17_17.42.27 _Otos_menet2-2.tdms

3.6. A mért adatok feldolgozása

A mérés előkészítésénél rögzített mintavételezési frekvenciák:

1. A futóművön, a tengelycsonkok közelében elhelyezett *ICP (Integrated circuit piezoelectric sensor)* jeladók esetében: 20 kHz

2. A felépítményen, a padlólemezen (kerékdobokon és a súlypontban) elhelyezett *MEMS (Microelectromechanical systems sensor)* jeladók esetében: 4 kHz

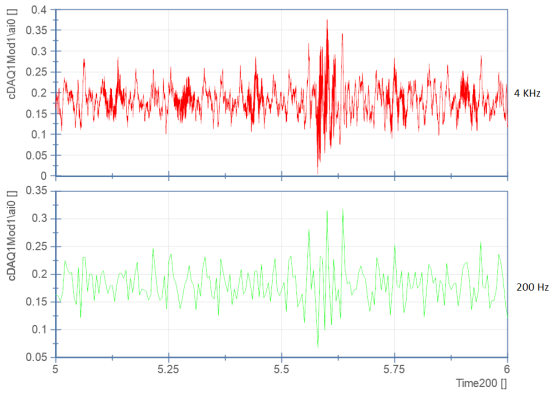
A nagy mintavételezési frekvencia hosszabb, forgalmi mérések esetében ($15-30$ perc), és nagyméretű (>1000 MB) adatfájlokat eredményezett.

Az elsődleges kiértékeléshez a rögzített adatfájlokat újra mintavételeztük 200 Hz sűrűséggel.

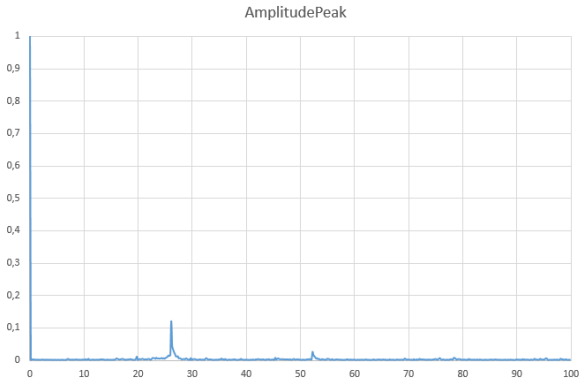
Összeállítottunk egy scriptet, amivel ekvidisztánsan 200 Hz-re sikerült utólagosan módosítani a mintavételezést. Az eredeti nem teljesen ekvidisztáns (egyenlő dT lépésközű) mérés volt, ennek oka, hogy a mérést a mérőkártya pontos belső időjelét a laptop kevésbé pontos nem valós idejű órájával kellett kiegészíteni. Teljes valós idejű rendszert ilyen méretű ($1-1,5$ GB) adatoknál nem tudtunk alkalmazni, de ez nem befolyásolja a kiértékelésnél a pontosságot. A 20 kHz illetve 4 kHz helyetti 200 Hz jelentős méretbeli csökkenést is jelent (1 GB $\gg \sim$ 20 MB).

DOI: 10.15477/SZE.MMTDI.2017.007

Az adatok a jelenlegi 200 Hz-es újramintavételezési módszerrel ekvidisztánsak, és a jelenlegi kisebb fájl méretekkel már könnyebb velük műveleteket végezni (pl. Fourier transzfromációt).

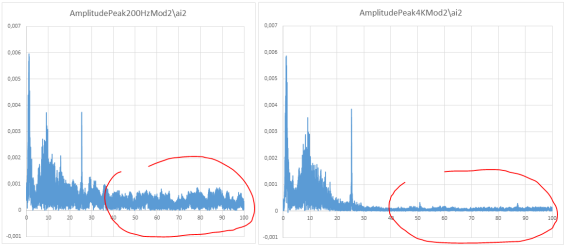


3.14. ábra. Az újramintavételezés eredménye (fent: 4 kHz, alul 200 Hz)



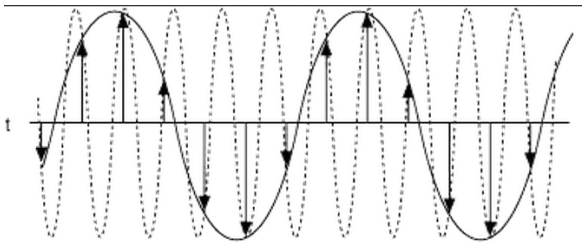
3.15. ábra. A 200 Hz-en újramintavételezett jel nyers FFT analízise

Kérdés, hogy a Fourier transzformáció hozza-e azokat az eredményeket, amiket elképzeltünk, mégpedig hogy a 200 Hz-re mintavételezett elemekből kiszedi-e a nagyfrekvenciás jeleket. Az első vizsgálat szerint pont fordítva működik. Éppen a nagy mintavételezésű jeleknél nincsenek nagyfrekvenciás csúcsok. Feltételezés, hogy a Shannon (Nyquist) törvény értelmében a 200 Hz-es újramintavételezés során alulmintavételeztük a nagyfrekvenciás jeleket, amik épp ezért a kisebb mintavételezésnél jelentkeznek, lásd 3.16 ábra és 3.17. A Shannon törvény hatását tovább kell vizsgálni a további menetdinamikai elemzések függvényében.



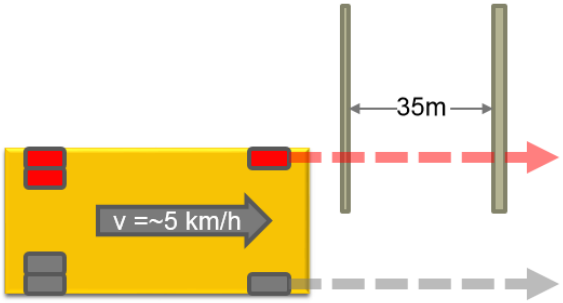
3.16. ábra. Az újramintavételezés hatása a frekvenciaspektrumokra

DOI: 10.15477/SZE.MMTDI.2017.007

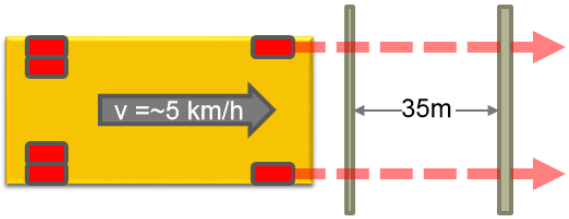


3.17. ábra. A Shannon (Nyquist) törvény magyarázó ábrája

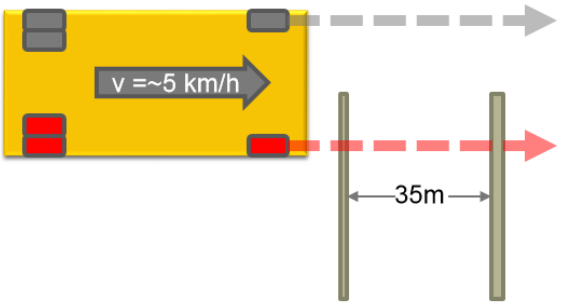
Az identifikációs mérések kiértékelésénél az ismert akadályokon való áthaladást az alábbi ábrák szerint jelöltük. A vizsgálat során a járművezető saját maga a gázpedál szabályozás segítségével először hozzávetőlegesen 5, majd 15 km/h sebességgel hajtotta végre az áthaladásokat.



3.18. ábra. Akadályon való lassú áthaladás a bal keréksorral



3.19. ábra. Akadályon való lassú áthaladás mindkét (dupla) keréksorral



3.20. ábra. Akadályon való lassú áthaladás a jobb keréksorral

DOI: 10.15477/SZE.MMTDI.2017.007

4. A mért adatok nemparametrikus statisztikai analízise

A jármű függőleges gyorsulását az útfelület változékonysága okozza, amely kényelmetlenséggel jár az utasok számára és sérülést okozhat a rakományban, illetve tovább károsítja az út felületét. A jármű felfüggesztési rendszerének szerepe elkülöníteni a jármű karosszériát a függőleges gyorsulástól, hogy kényelmesebb vezetést és csökkentett útterhelést biztosítson. Az úthálózat műszaki feltételeinek és a tömegközlekedési eszközök értékelése fontos támogatás a szolgáltatói döntéshozatalban a menetrendet és az útfelújítást illetően.

Mindkét cél elérhető a járműflotta felfüggesztési rendszereinek méréseivel a napi működés során és a rázkódás elemzésével objektíven értékelhető mind az utak, mind a járművek műszaki állapota. Egy ilyen elemzés a következő lépések mentén végezhető el.

1) Matematikai modell kidolgozása a névleges rázkódási mechanizmus leírására, amely referenciaként használható egy jármű felfüggesztési rendszerének és az út műszaki állapotának értékelésére. A referencia modell alapja sajátos körülmények között zajló vizsgálat, amikor az útfelület sértetlen és egyenes, a jármű sebessége állandó és a jármű függőleges dinamikája az úton elhelyezett jól meghatározott próba akadályokkal gerjesztett. Az ismételt kísérletekkel egy halmaz névleges modellt kapunk, amelyből egy úgynevezett névleges bizonytalansági modell halmaz hozható létre, [33, 16].

2) Az úthálózatot szegmensekre kell felosztani és minden szegmensre ismételni szükséges a modellezést normál járműhasználat mellett. A modelleket össze kell vetni a névleges bizonytalansági modell halmazzal. A különbségek több helyről származnak: útfelület-típusok, a felfüggesztési rendszer nem modellezett dinamikája, amelyet a kereszt- és hosszirányú gyorsulások okoznak, továbbá dőlés és bólintás, illetve a terhelés tömegének változása. Ahhoz, hogy szétválasszuk a különböző hatásokat, a következőket tehetjük:

- A kereszt-/hosszirányú/dőlés és bólintás dinamikát ki kell szűrni a függőleges mérésekből további mérésekkel és a zavaró mozgások becslésével.
- Azonos szegmensben több jármű mérését összehasonlítva szétválaszthatók az útból és a járművek különböző műszaki állapotából keletkező hatások.

DOI: 10.15477/SZE.MMTDI.2017.007

A vizsgálatokat a felfüggesztési rendszer spektrálanalízisével kezdjük. Egy városi buszról származó kísérleti adatok alapján a kerekeken és a karosszérián jelentkező rázkódást vizsgáljuk a frekvencia-tartományban. Az elemzés egyik célja, hogy a felfüggesztési rendszer és az amplitúdóra gyakorolt csillapítás fő sajátfrekvenciáit jellemezzük. A másik cél, hogy az utaskényelem szempontjából értékeljük az utat és a felfüggesztési rendszert a vonatkozó ISO szabványok alapján.

A spektrális becslés célja a gyorsulásjel teljesítmény sűrűség spektrumának meghatározása véges adathalmaz alapján. Egy tágabb értelemben vett stacionárius folyamat teljesítménysűrűség-spektruma (PSD) az autokorreláció sorozat diszkrét Fourier-transzformációja (DFT) . Normalizált frekvencia esetén a következőből adódik [30], [36], hogy

$$P_{xx}(f) = T_s \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_{xx}(m) e^{-i2\pi m f T_s}, \tag{4.1}$$

ahol az autokorreláció sorozat definíciója

$$R_{xx}(m) = \frac{E[(x_t - \mu)(x_{t+m} - \mu)]}{\sigma^2} \tag{4.2}$$

ezt véges mintából a szokásos módon becsüljük. Itt μ jelöli a sorozat középértékét,

$$\sigma^2 = \int_{-f_N}^{f_N} P_{xx}(f) df$$

pedig a varianciát jelöli az $f_N = \frac{1}{2T_s}$ Nyquist frekvenciával. $E(.)$ a várható érték operátora.

4.1. Periodogram

A PSD közvetlenül becsülhető a mintavételezett adatokból (nemparametrikus eljárás). A legegyszerűbb megoldás a periodogram, amely az autokorreláció sorozat torzított becslésének Fourier leképezése:

$$\hat{P}_{xx}(f) = \frac{T_s}{N} \left| \sum_{t=1}^{N} x_t e^{-i2\pi f(t-1)} \right|^2, \quad -f_N < f < f_N. \tag{4.3}$$

Egyoldali periodogram esetén az értékek kettővel szorzódnak (kivéve a 0 és az f_N frekvenciákat), így az összteljesítmény változatlanul marad.

DOI: 10.15477/SZE.MMTDI.2017.007

A periodogramok diszkrét Fourier transzformáció (DFT) segítségével számíthatók. A DFT és egy mintavételezett x_t, $t = 1,2,...,N$, adatsorozat inverz DFT-je:

$$X_k = \sum_{t=1}^{N} x_j \omega_N^{(t-1)k}, \qquad k = 0,1,...,N-1 \tag{4.4}$$

$$x_t = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k \omega_N^{-(t-1)k} \tag{4.5}$$

ahol

$$\omega_N = e^{-\frac{2\pi i}{N}}. \tag{4.6}$$

Ezután az egyoldali periodogram az alábbiak szerint számítható ki:

$$P_{xx}(f_k) = \begin{cases} \frac{T_s}{N}|X_k|^2, & k = 0 \text{ or } k = \frac{N}{2}, \\ 2\frac{T_s}{N}|X_k|^2, & k = 1,2,...,\frac{N}{2}-1 \end{cases} \tag{4.7}$$

$$f_k = \frac{k}{NT_s}, \qquad k = 0,1,2,...,\frac{N}{2} \tag{4.8}$$

A periodogram aszimptotikusan torzítatlan, bár, néhány esetben a periodogram nem megfelelő becslésre még akkor sem, ha az adatsor hosszú. Ez a periodogram varianciájából adódik:

$$\mathrm{Var}(P_{xx}(f_k)) = \begin{cases} 2P_{xx}^2(f_k), & k = 0 \text{ or } k = \frac{N}{2}, \\ P_{xx}^2(f_k), & k = 1,2,...,\frac{N}{2}-1 \end{cases}, \tag{4.9}$$

amely nem tart a 0-hoz, amikor N tart a végtelenbe. Statisztikai értelemben a periodogram nem ad konzisztens becslést a valós teljesítmény spektrálsűrűségére tágabb értelemben vett stacionárius folyamatok esetén.

4.2. A Welch módszer

A Welch módszer lényege, hogy csökkenti a periodogram varianciáját, szegmensekre tagolja az idősort általában átfedésekkel, [52]. A Welch módszer egy módosított periodogramot ad minden szegmensre, majd átlagolja ezeket a becsléseket és készít egy becslést a teljesítmény spektrálsűrűségére. Mivel a folyamat széles értelemben stacionárius és a Welch módszer az idősorok különböző szegmenseinek PSD becslését alkalmazza, a módosított periodogramok megközelítőleg nem korreláló becslései a valódi PSD-nek és átlagosan csökkentik a varianciát. Jellemzően a szegmenseket megszorozzuk egy ablakfüggvénnyel, ilyen a Hamming ablak, tehát a Welch módszer egy átlagolt módosított periodogramot ad meg.

DOI: 10.15477/SZE.MMTDI.2017.007

A Welch módszer véges mintára a PSD egy torzított becslését adja. A PSD becslés várható értéke:

$$E(P_{Welch}(F)) = \frac{T_s}{N} \int_{-f_N}^{f_N} |W(f-\xi)|^2 P_{xx}(\xi) d\xi, \tag{4.10}$$

ahol $W(f)$ az ablakfüggvény Fourier transzformációja. A Welch becslés aszimptotikusan torzítatlan. Egy rögzített hosszúságú adatsor esetén a Welch becslés torzítása nagyobb mint a periodogramé, mert a szegmensek hossza kisebb mint az egész adatminta hossza. A Welch becslés varianciája nehezen számítható. Alapvetően a variancia fordítottan arányos azon szegmensek számával, amelynek módosított periodogramjai átlagoltak.

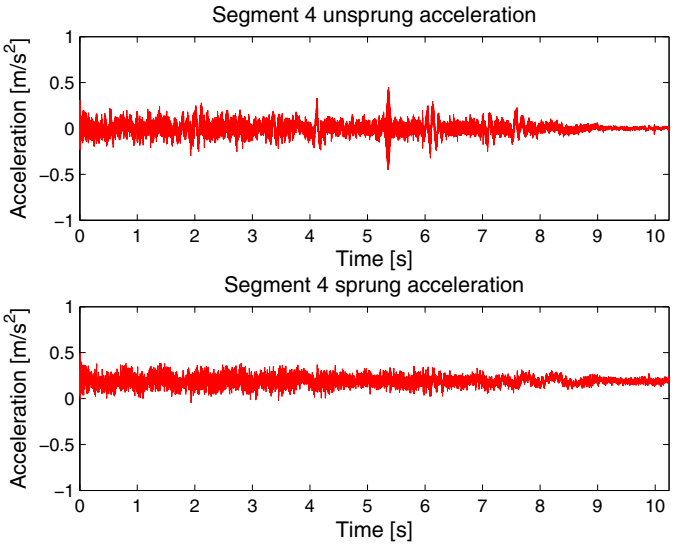
4.3. Mérések feldolgozása

A mérések részletes leírását az előző fejezetben adtuk meg. Emlékeztetőül: ahhoz, hogy egy városi busz működését teszteljük, a buszt két sajátos útvonalon vittük végig igazi közlekedési körülmények között. A busz kétszer ment végig a kijelölt úton. A tesztek alapján a felfüggesztési rendszert és az utaskényelmet vizsgáljuk a vonatkozó ISO szabványok alapján.

A tesztelt buszon elhelyeztünk egy 10 csatornás gyorsulásmérőt és egy jellegzetes adatgyűjtő rendszert. Minden tengelyhez közel Z tengely irányban egy PCB ICPtype gyorsulásmérőt szereltünk fel a rugózatlan tömeg függőleges gyorsulásának mérésére. A padlólapon ezek fölé a szenzorok fölé három különböző DC MEMS gyorsulásmérőt tettünk a Z tengely mentén a rugózott tömeg függőleges gyorsulásának mérésére jobboldalon elöl és hátul mindkét oldalon. Az adatok mintavételezési ideje 20 kHz. A gyorsulás jelátalakító rendszer mellett GSP alapú útvonalrögzítő szintén felkerült a járműre.

Az útvonal során gyűjtött adatokat felosztottuk kisebb részekre: nyolc, egyenként 10 : 24 másodperces darabokra bontottuk. A méréseket mind az út minősége, mind a járműdinamika befolyásolja. Ahhoz, hogy elkerüljük a kereszt- és hosszirányú járműgyorsulás által okozott zavaró hatásokat, a szakaszok kiválasztásánál az állandó sebességet és az egyenes útszakaszt kritériumként fogalmaztuk meg. A 6.3 ábra mutatja az adatminta rögzítését.

A 20 kHz-es mintavételezéssel kapott nyers adatok egy nagy adathalmazt alkotnak. Egy tipikus mérés DFT együtthatóinak amplitúdóit láthatjuk a 6.4 ábrán. Jelentős mennyiségű energia magas frekvenciájú jelek esetében jelenik meg, miközben a felfüggesztési rendszerre és az utaskényelemre vonatkozó hasznos információ 15 Hz-ig értékelhető. A jel magas frekvenciájú komponensei jellemzően a környezet elektromágneses zajából, az elektromos hálózatból és harmonikusaiból, továbbá a motor és a váltó mechanikus rezgéseiből tevődnek össze. Ahhoz, hogy csökkentsük az adat mennyiségét – amely főleg a későbbi munka során a modell identifikációjához szükséges – az adatok újbóli mintavételezése szükséges. Az új mintavételezési frekvencia választott értéke $f_s = 1/T_s = 200Hz$, amely elég magas a felfüggesztési rendszer frekvencia-összetételének felfogására. Mindamellett az újbóli mintavételezésnél óvatosan kell

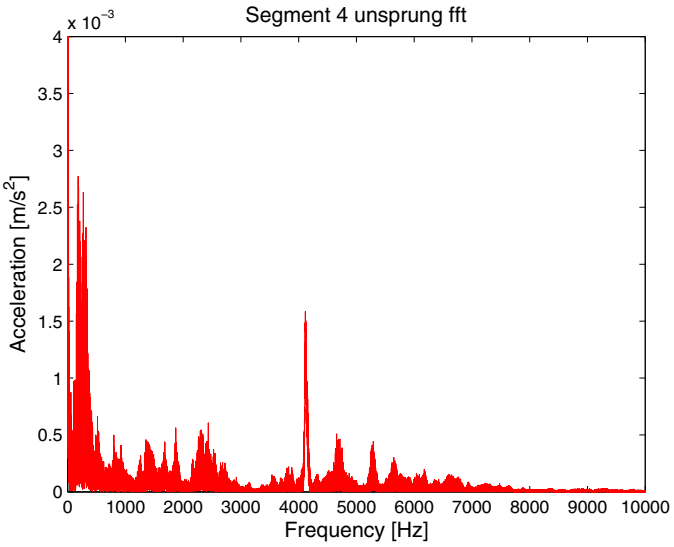


4.1. ábra. Mért időtartományi gyorsulási adatok jobboldalon elöl. Rugózatlan tömeg (fent) és rugózott tömeg (lent)

eljárni a mintavételezési hibahatás miatt (aliasing).

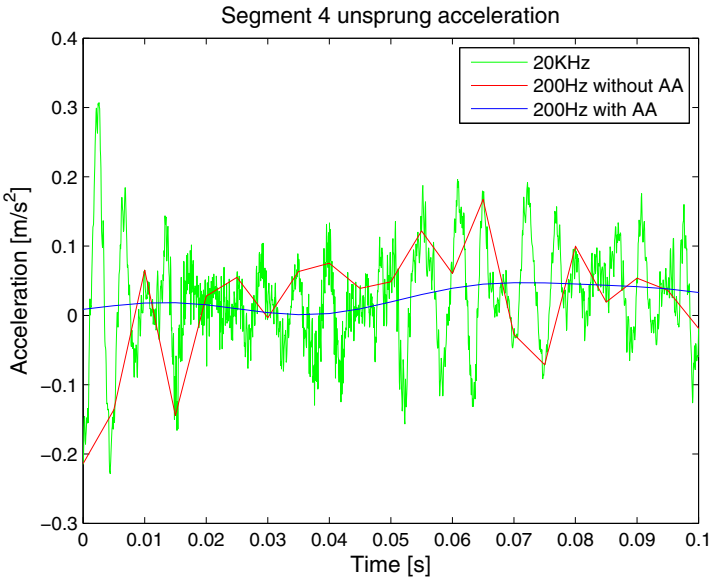
Szűrő nélküli hibahatáskor, élsimítás nélkül a jel (zaj) magas frekvenciájú összetevői alacsony frekvenciák esetén jönnek elő az újbóli mintavételezés során és módosítják a jel alacsony frekvenciájú összetevőit. Az élsimításról bővebben lásd [14].

Egy ideális szűrőt használtunk élsimításra. Először a 20 kHz jel DFT komponenseinek 25 kHz-nél magasabb frekvenciáit nulláztuk le. Aztán a szűrt 20 kHz jelet alakítottuk át inverz DFT-vel (4.5). A 4.3 ábrán az eredeti jel időtartományon értelmezett zöld görbéjét és a szűrt és átalakított jel görbéjét kékkel láthatjuk. (Csak egy másodpercnyi idő látható.) Ezt a szűrt jelet újra mintavételezhetjük $f_s = 200Hz$ értékkel. Látható, ahogy az eredeti jelet újra mintavételeztük szűrés nélkül. Az eredményt a 4.3 ábrán mutatjuk a piros görbével. Két újra mintavételezett



4.2. ábra. Mért gyorsulási adatok frekvencia-tartományban – jobb első rugózatlan tömeg

DOI: 10.15477/SZE.MMTDI.2017.007

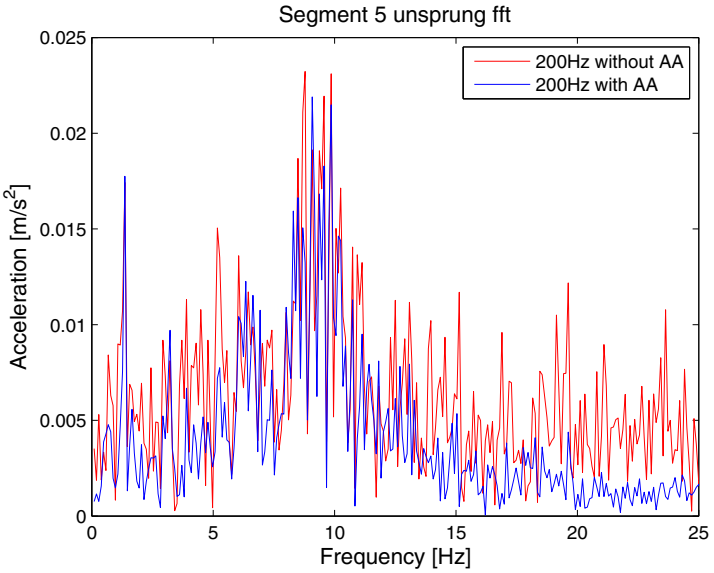


4.3. ábra. Anti-aliasing szűrés

jel különbségét frekvencia-tartományban a 4.4 ábra mutatja be. (A szűrt és újra mintavételezett jel spektruma megegyezik az eredeti 20 kHz-es jel spektrumával.)

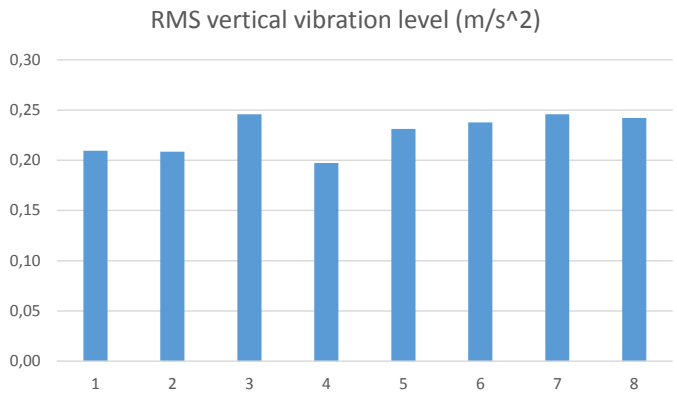
4.4. A felfüggesztési rendszer spektrálanalízise

Mivel az utasok és a vezető rezgésterhelése nagymértékben az útminőségtől és az alváz dinamikai paramétereitől függ, érdemes az útszakaszokat és a felfüggesztési rendszert az utazás kényelmének függvényében értékelni.



4.4. ábra. Az élsimítás hatásai a jel alacsony frekvenciás komponenseire

DOI: 10.15477/SZE.MMTDI.2017.007



4.5. ábra. Függőleges rezgési szint (RMS) a nyolc útszakaszra

A VDI 2057 ajánlása és az ISO 2631 szabvány szerint az utazási kényelem a következő mutatóktól függ:

- A vezető és az utasok 1 Hz körül függőleges gerjesztést szenvedhetnek el, még pontosabban a $0,75-1,45$ Hz tartományban.

- A frekvenciával súlyozott RMS értékét

$$RMS = \left[\frac{1}{T}\int_0^T a_w(t)^2 dt\right]^{1/2} \tag{4.11}$$

  számítják ki, ahol az a_w függőleges gyorsulásokat mérik az alvázon (rugózott tömeg) és a rugózott tömeg gyorsulásakor és ahol különböző emberi érzékenységet is figyelembe vesznek a frekvencia függvényében. Az ISO 2631 szabvány szerinti RMS besorolásokat mutatja a 4.1 táblázat. (Itt az a_w jelhez tartozó RMS értékét a frekvencia súlyozása nélkül számítjuk.)

- A felfüggesztési rendszer egy csillapító tényezőjét a rugózott és a rugózatlan tömeg gyorsulás amplitúdó aránya határozza meg. A csillapító tényező egy frekvenciafüggvény és a következőképpen számítható:

$$D(f) = \frac{A_s(f)}{A_u(f)}, \tag{4.12}$$

  ahol $A_s(f)$ és $A_u(f)$ a rugózott és rugózatlan tömeg gyorsulások teljesítmény spektrálsűrűség becslése az f frekvencián.

A függőleges rezgési szintek (RMS) minden szintre (4.11) alapján a rugózott tömeg gyorsulás időbeli adatai szerint lettek meghatározva, lásd a 4.5 ábrát. Az értékek $0,19$ és $0,25$ között mozognak, amely elfogadható szintű utaskényelmet mutat (összehasonlítva a 4.1 táblázattal) a kiválasztott nyolc útszakaszon.

DOI: 10.15477/SZE.MMTDI.2017.007

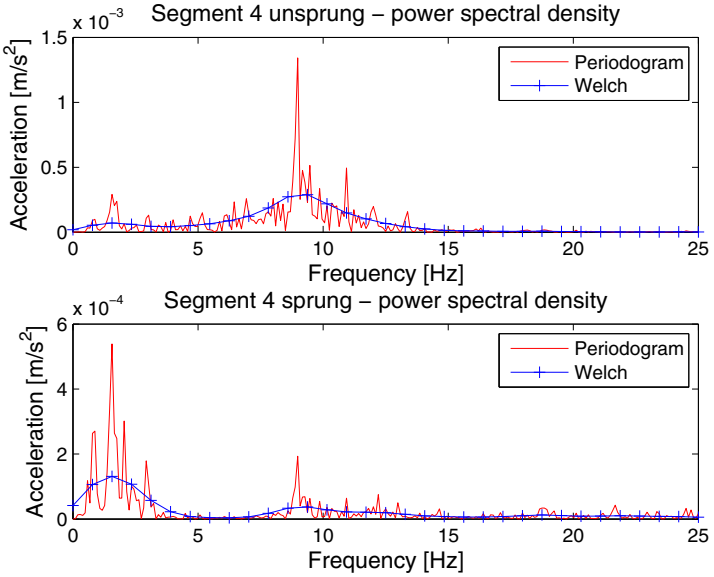
4.1. táblázat. Az utazási kényelem érzékelése az ISO-2631-1 alapján

Rezgési szint (RMS)	Érzékelés
< 0.315	Nem Kényelmetlen
$0.315 - 0.63$	Kissé kényelmetlen
$0.5 - 1$	Eléggé Kényelmetlen
$0.8 - 1.6$	Kényelmetlen
$1.25 - 2.5$	Nagyon kényelmetlen
> 2	Extrém módon kényelmetlen

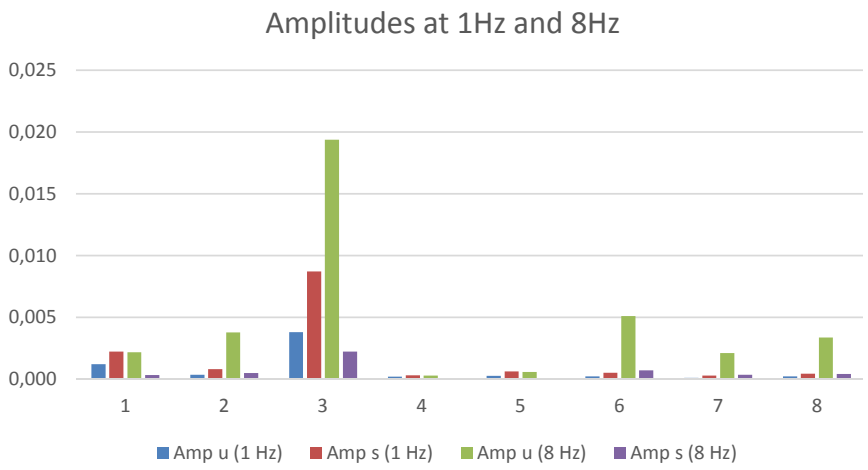
Az 1 Hz körüli utazási kényelem értékeléséhez és a csillapítási tényező meghatározásához a teljesítmény spektrálsűrűséget becsüljük minden szakaszra és mindkét gyorsulásérzékelőre a busz jobboldalán elöl. Egy tipikus PSD számítást mutat be a 4.6 ábra, ahol a periodogramot (4.7)-(4.8) és a Welch módszert ábrázoljuk. A periodogram a PSD aszimptotikusan torzítatlan becslését adja, de a varianciája nagyon nagy. A Welch módszer szintén a PSD egy aszimptotikusan torzítatlan becslését adja. Varianciája függ a választott ablak hosszától és az átlapolási aránytól.

Egy egyszerűsített felfüggesztési rendszermodell, az úgynevezett negyedjármű modell, amely két merev tömegből áll egy rugóval és egy csillapítóval összekötve (lehetőleg nemlineáris karakterisztikával), ahol az egyik tömeg a rugózott, a másik a rugózatlan tömeget jelképezi, továbbá a rugózatlan tömeg egy rugóval összekötve és egy kis elhanyagolható csillapítóval (gumiabroncs) kapcsolódik az úthoz.

A valós paraméterezésű linearizált rendszernek két könnyű csillapítású módja van komplex póluspárokkal. Ezt abból fizikai magyarázatból várjuk, hogy a két tömeg mért függőleges gyorsulásainak a PSD-i két csúcsot mutatnak az átviteli függvény két változata alapján. A két



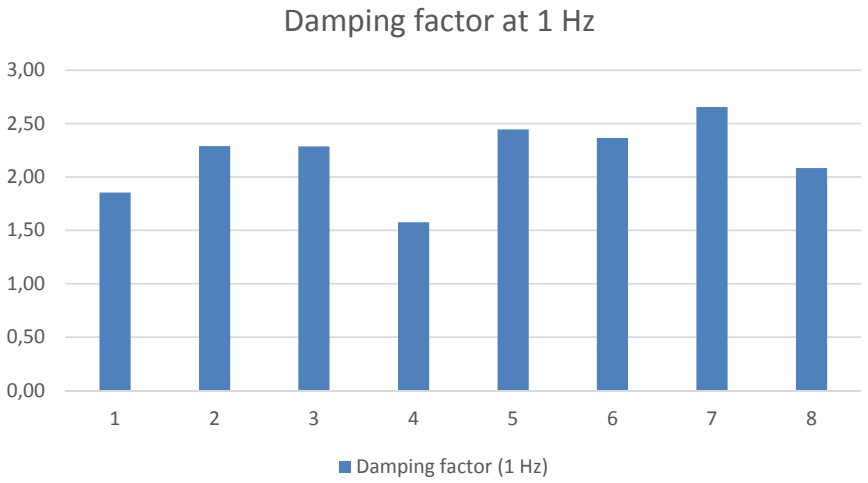
4.6. ábra. Tipikus PSD számítás eredménye, 4. szegmens adatai



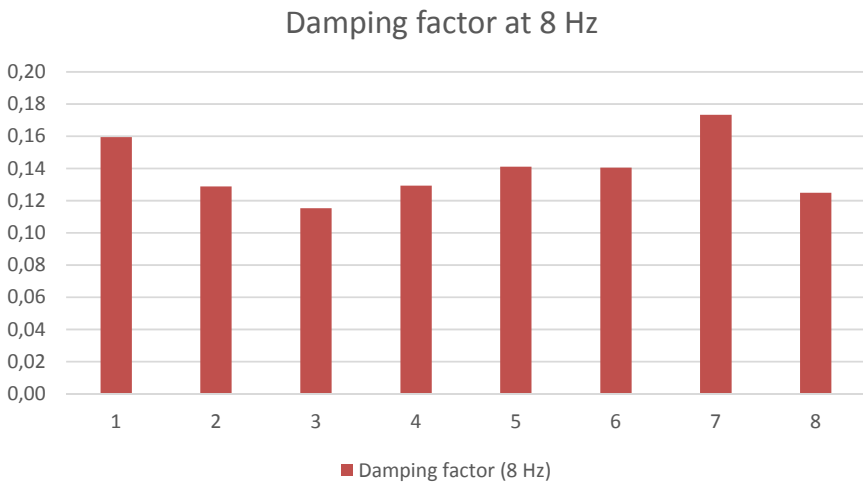
4.7. ábra. Rugózott és rugózatlan tömeg gyorsulásmérés teljesítmény spektrálsűrűsége a két csúcsérték esetén. *Amp u* a rugózott és *Amp s* a rugózatlan eset.

csúcsot mutatja a 4.6 ábra 1 és 8 Hz körül. Ezek a frekvenciák minden szakaszra megközelítőleg ugyanazok. A PSD megegyező amplitúdói elérhetők a Welch módszer alapján és láthatóak a 4.7 és a 4.9 ábrákon.

A 4.7 ábra által bemutatott értékekből számíthatjuk a felfüggesztési rendszer csillapítási tényezőjét. A 4.9 ábra mutatja, hogy a függőleges rezgés energiáját a jobb első keréknél a felfüggesztési rendszer elnyeli. Az alváznál mért energia $11-18\%$-ra csökkent a keréknél mért energiához képest. Másfelől viszont az energia 1 Hz-nél erősödött a 4.8 ábra alapján, de ez nem rontja az utasok komfortérzetét.



4.8. ábra. 1 Hz-es csillapítási tényező számítása (4.12) alapján (Egynél nagyobb értékek mutatják az erősítéseket.)



4.9. ábra. 8 Hz-es csillapítási tényező számítása (4.12) alapján

4.5. Következtetések

Egy városi busz felfüggesztési rendszerét vizsgáltuk valós gyorsulásmérések spektrálanalízise alapján.

1. Kidolgoztuk a mérési eljárást, a mintavételezés és az előzetes zajszűrés módját amely alkalmas a vertikális járműdinamika spektrális analíziséhez szükséges adatok felvételére.

2. Módszert javasoltunk a spektrál sűrűség függvény becslésére .

3. Megmutattuk hogy ezzel az eljárással azonosíthatók a jármű vertikális dinamikájának jellemző sajátfrekvenciái, valamint

4. Megmutattuk hogy a kapott eredmények alapján lehetővé válik a felfüggesztési rendszer útgerjesztés csillapításának és több utaskényelmi mutatónak a kiszámítása.

Az alkalmazott módszer, mint nemparametrikus analízis, az első fázis a rendszermodellezésben és identifikációban. A továbbiakban tárgyaljuk a rendszer fizikai és fekete doboz modelljeinek identifikációját, továbbá irányítástechnikai célokra alkalmas bizonytalansági modellek származtatásának lehetőségeit.

DOI: 10.15477/SZE.MMTDI.2017.007

5. AR és ARMA modell identifikáció és spektrál analízis

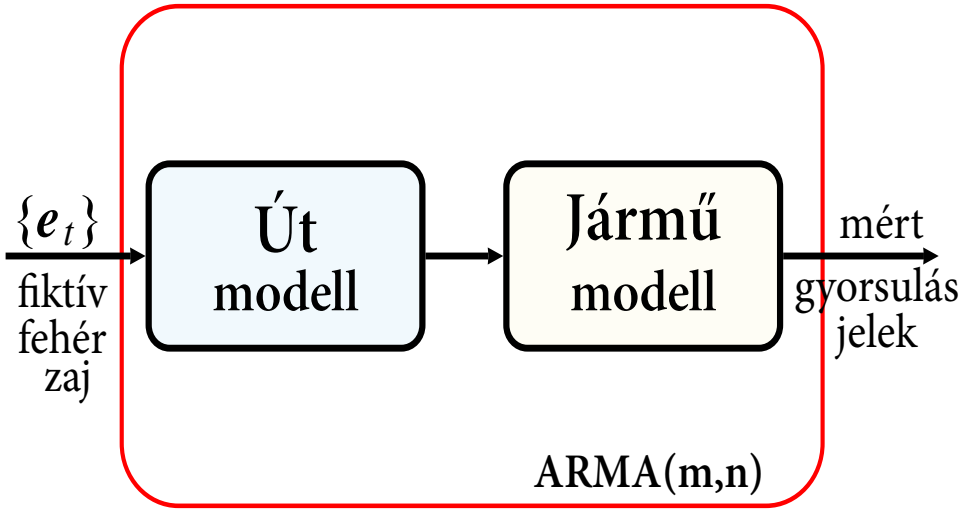
Ebben a fejezetben a parametrikus modellek identifikációját és ennek alapján a spektrálanalízist mutatjuk be. Ez sokkal tárgyilagosabb elemzést tesz lehetővé a validációs eszközök szélesebb tárháza miatt. Ebben az esetben is két rendszert veszünk figyelembe. A bemenet mindkét esetben fehér zaj, amely az útgerjesztést és az egyéb zavarásokat mutatja. A kimeneten az egyik esetben a keréktengely a másikban az alváz függőleges gyorsulása jelenik meg. Autoregresszív (AR) és autoregresszív mozgóátlag (ARMA) modellek alkalmazásával elérhetjük a megfelelő rendszerfelépítést. A modellek megfelelő rendje az Akaike információs kritériumán (lásd az A.4. Függelék) és a modellek pólus-zérus elrendezésének figyelembe vételén alapul. A kimenetek PSD-jét kiszámítva összehasonlítjuk azokat az előző fejezet eredményeivel. Az ebben a fejezetben alkalmazott parametrikus módszerek igazolják és kiegészítik azokat az eredményeket, amelyeket nemparametrikus módszerekkel kaptunk és segít objektíven megkülönböztetni a periodogram csúcsait. Ezek azután átlagolhatók, a Welch módszerben így biztosítva a még megbízhatóbb eredményeket a rezgésvizsgálathoz.

A spektrális becslés célja egy jelben a teljesítmény frekvencia eloszlásának meghatározása véges adathalmaz alapján. Míg a nemparametrikus módszerek esetén a PSD közvetlenül becsülhető a jelből, a parametrikus módszerek olyan jelből becslik a PSD-t, amelyre feltételezik, hogy egy fehér zajjal gerjesztett lineáris rendszer kimenete. A paraméterek becslésére több módszer is ismert, a Függelékben tárgyaltakon kívül a statisztikából ismert a Yule-Walker és a Burg módszer. A PSD becsléséhez először azt a lineáris rendszer paramétereit becsüljük amiről feltétezzük, hogy kimenőjele a bemeneten ható fehér zaj folyamatra kapott válaszjel. Ezek a módszerek jobb eredményeket tudnak adni a klasszikus nemparametrikus módszerekhez viszonyítva akkor, amikor a rendelkezésre álló mért jel adathossza aránylag rövid. A parametrikus becslések sima PSD becsléseket számíthatunk, viszont jobban ki vannak téve a modell téves specifikációjából eredő hibáknak.

A leginkább alkalmazott lineáris rendszermodell a csak pólusokkal paraméterezett AR modell, ahol a bemeneti fehér zajra a szűrő kimenete egy autoregresszív (AR) folyamat:

$$\text{AR(p):} \qquad y_t + a_1 y_{t-1} + \ldots + a_p y_{t-p} = e_t,$$

ahol e_t és y_t a λ varianciával rendelkező fehér zaj bemenet és a p-rendű rendszer kimenete



5.1. ábra. A mért gyorsulásjelekből való ARMA modell identifikáció nem mérhető fiktív fehér zaj gerjesztés feltevésével

a diszkrét t időben. Az AR módszerek jellemzően helyesen adják meg az adatspektrum csúcsokat és nagy PSD-s adatokat bizonyos frekvenciákon. Ebben a fejezetben egy adott modell sorrenddel az AR modell paramétereket becsüljük a legkisebb négyzeteken alapuló módosított kovariancia módszer alkalmazásával. A módosított kovariancia módszer az időben előre-hátra számított predikciós hibák négyzetének minimalizálásán alapul, [14].

Egy másik lehetséges modellstruktúra az autoregresszív - mozgóátlagú (ARMA) folyamat

$$\text{ARMA(p,q):} \quad y_t + a_1 y_{t-1} + \ldots + a_p y_{t-p} = e_t + c_1 e_{t-1} + \ldots + c_q e_{t-q}.$$

ahol e_t egy λ varianciájú fehér zaj folyamat.

A következőkben adott n és p rendekkel becsüljük az ARMA modell paramétereit, iteratív eljárással minimalizálva a négyzetes predikciós hibakritériumot, [28]. A $q = p$ választáshoz az egyetlen független változóval rendelkező ARMA(p) modell tartozik.

5.1. Parametrikus spektrális becslés

Tegyük fel, hogy adott N darab reguláris $y = \{y_1, y_2, \ldots, y_N\}$ mintavételezési mérésünk f_s mintavételezési frekvenciával a skalár kimenetből és feltesszük, hogy egy AR vagy ARMA modell identifikálható az adatokból. Ha a modellstruktúra (AR(p) vagy ARMA(p)) illetve a λ zaj varianciája adott, akkor a kimenet becsült PSD-je kifejezhető mint

$$\Phi_{yy}(f) = |W(f)|^2 \lambda \tag{5.1}$$

az $f \in \{-\frac{f_s}{2}, -\frac{f_s}{2}+\frac{f_s}{N}, -\frac{f_s}{2}+\frac{2f_s}{N}, \ldots, \frac{f_s}{2}\}$ frekvencia függvényében, ahol

$$W(f) = \frac{1}{1+\sum_{k=1}^{p} a_k e^{-j2\pi fk}} \quad \text{AR(p)} \tag{5.2}$$

$$W(f) = \frac{1+\sum_{k=1}^{p} c_k e^{-j2\pi fk}}{1+\sum_{k=1}^{n} a_k e^{-j2\pi fk}} \quad \text{ARMA(p)} \tag{5.3}$$

a modell átviteli függvénye.

5.1.1. A paraméterbecslési feladat

Ha a modell rend (p) kiválasztásra került, a paraméterbecslés célja megtalálni azokat a

$$\theta = [a_1,\, a_2,\, \ldots, a_p]^T \qquad \text{AR(p)} \tag{5.4}$$

$$\theta = [a_1,\, a_2,\, \ldots, a_p,\, c_1,\, c_2,\, \ldots, c_p]^T \quad \text{ARMA(p)} \tag{5.5}$$

modellparamétereket amelyek minimalizálják az $\varepsilon_t(\theta) = y_t - \hat{y}_t(\theta)$ előrejelzési (predikciós) hiba λ varianciáját. Ez a probléma ugyanaz, mint a PSD becslés varianciájának minimalizálása.

Az AR modell paraméter-identifikációjához a Least Squares (LS) és a módosított kovariancia módszert használjuk, amely minimalizálja az előre/hátra (forward - backward) predikciós hibák négyzetösszegét, [23].

Az ARMA modell paraméter-identifikációjához PE vagy ML módszert alkalmazhatunk, amiben egy iteratív kereső algoritmussal (tipikusan Newton - Raphson módszerrel) kapjuk meg a becsült modell paramétereket. A módszerek leirása megtalálható a Függelékben és a [30] illetve [37] referenciákban.

A modell rend megválasztása egy nagyon fontos probléma, mert ha a választott rend túl kicsi, akkor torzított paraméterbecslést kapunk. Ilyenkor az eredményül kapott spektrális becslés tipikusan túl sima (lapos) lesz. Ha pedig a modell rendje túl nagy, a spektrális becslés hamis csúcsokat tartalmazhat.

A rend megválasztásában az egyik megközelítés a rend növelése addig, amíg az identifikációs kritérium csökken. Ezzel az a nehézség, hogy a kritérium általában a p modell rend monoton nemnövekvő függvénye. Ezt a problémát csökkenthetjük büntető függvénnyel, amely a modell rendje szerint nő. Számos kritérium javasolja a büntetés eszközét, amely lineárisan nő n-nel. Az egyik Akaike információs kritériuma (AIC):

$$\text{AIC}(p) = \log V + \frac{2d}{N} \tag{5.6}$$

ahol d a paraméterek száma, amely lineárisan nő p-vel, V pedig a veszteségfüggvény, azaz

$$V = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} \varepsilon_t(\theta)^2. \tag{5.7}$$

Itt $\varepsilon_t(\theta)$ a predikciós hiba egy t időpillanatban és a θ paramétervektorral. Megfigyelhető, hogy az AIC p rendre adott becslése túl kicsi amikor nem-AR folyamatokra alkalmazzuk és hajlamos túlbecsülni a rendet, ha N nő. További segítség lehet a kiválasztásban, ha a $W(f)$ átviteli függvény zérus-pólus elrendezését nézzük.

Másrészről, mivel az optimális paraméterek keresése megragadhat a kritériumfüggvény lokális optimumaiban, a túlparametrizálás is előnyös lehet és előfordulhat, hogy jobb becslési eredményt hoz a modell fizikailag jelentős pólusaira.

Tudjuk, hogy a mérési elrendezést sok időváriáns bizonytalan hatás éri, amelyekről nincsenek információink (útgerjesztés, borulás, dőlés, a jármű kereszt- és hosszirányú mozgása a tesztek során). Ezért nem várhatjuk el az identifikációs eljárástól, hogy a mechanikai alapon levezetett modelleknek megfelelő struktúrájú pontos modellt szolgáltasson ami különböző adatokkal eleget tesz az általános validációs eszközök kritériumainak. Csak azt várhatjuk el, hogy a fizikai rendszer néhány jelentős tulajdonsága következetesen megtalálható a modellben.

Egy egyszerűsített felfüggesztési rendszermodell, az úgynevezett negyedjármű modell, amely két merev tömegből áll egy rugóval és egy csillapítóval összekötve (lehetőleg nemlineáris karakterisztikával), ahol az egyik tömeg a rugózott, a másik a rugózatlan tömeget jelképezi, továbbá a rugózatlan tömeg egy rugóval összekötve és egy kis elhanyagolható csillapítóval (gumiabroncs) kapcsolódik az úthoz. A valós paraméterezésű linearizált rendszernek két gyengén csillapított rezgési módja van amit a komplex póluspárok jellemeznek. Ezt a modell identifikációs eljárásából származtatjuk, amely során a két módusz legalább két sajátfrekvenciája megtalálható. A frekvencia, sajnos, megegyezik a motor üresjárati sebességével, amely körülbelül 10 Hz, és ez nagyon közel van a felfüggesztési rendszer egyik sajátfrekvenciájához.

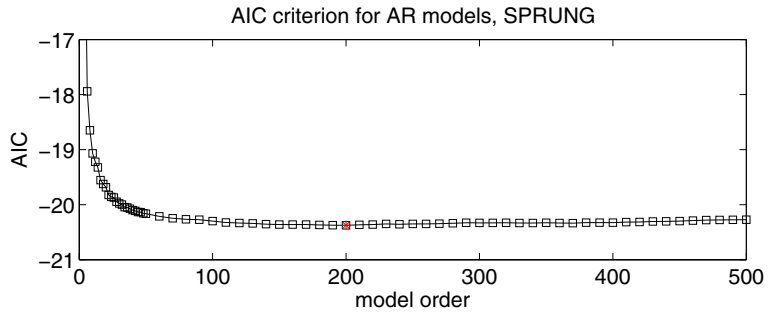
Ebben a helyzetben a következőket mondhatjuk: ha az adatokat előállító rendszer jellemezhető a választott modellstruktúrával, akkor létezik egy olyan minimális modell rend, amikor a modell rend további növelése néhány jelentős modell tulajdonságot érintetlenül hagy. Még pontosabban tehát, a jó modellstruktúrától elvárjuk, hogy a modell alacsony frekvenciájú viselkedése (a sajátfrekvenciák megegyeznek a stabil komplex póluspárok pozitív valós részével) nem változik jelentősen a modell rend növelésével.

5.2. A felfüggesztési rendszer parametrikus spektrálanalízise

A felfüggesztési rendszer teljes modellezése a következőképpen történhet:

- Jellemezzük a rendszer vibrációs tulajdonságait azért, hogy értékelni tudjuk az utazási kényelmet. Hosszabb távon ez diagnosztikai és karbantartási célokat is szolgálhat.
- Értékeljük az út műszaki állapotát különösen az utazási kényelem szempontjából.

DOI: 10.15477/SZE.MMTDI.2017.007



5.2. ábra. AR modellek Akaike információs kritériuma a modell rendjének függvényében. A minimális értéket a piros $\star$ jelzi.

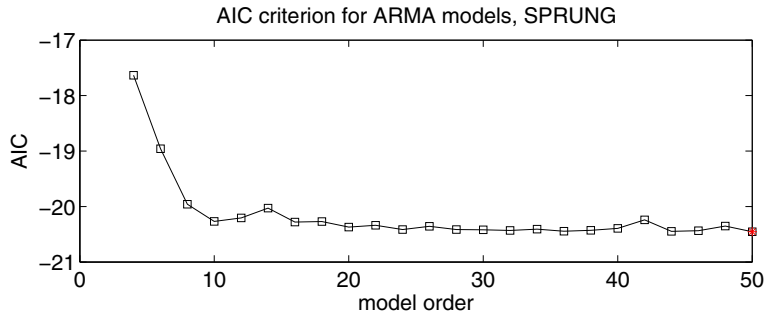
Ahhoz, hogy elérjük ezeket a célokat, szükségünk van olyan matematikai modellre, amely által meg tudjuk különböztetni az út által okozott függőleges zavarásokat, járműmozgást (borulás és dőlés a kereszt- és hosszirányú gyorsulás hatására) és a motorból, a váltóból és a rugalmas alváztól érkező egyéb rezgéseket.

A parametrikus spektrálanalízis segít megbecsülni a modell rendjét, amely a felfüggesztési rendszer méréseit jellemzik. Kapunk egy kezdő feltevést a rendszermódokról és egy pontosabb becslést a sajátfrekvenciákról és PSD amplitúdóiról. Az utóbbi az utazási kényelem elemezésének alapja.

Az egy keréken lévő felfüggesztést legalább negyedrendű modellel modellezhetjük, amelynek két enyhén csillapított másodrendű módja van. A modell bemenetének fizikai magyarázata az út függőleges elmozdulása. A modell kimenetei a keréktengely és az alváz függőleges gyorsulásai. További zavaró bemeneteket alkot a motor, a váltó és a rugalmas alváz rezgése, amelyet a jármű dőlése és bólintása gerjeszt. Sőt, a rugó és a csillapító nemlineáris hatásai is jelen vannak. Ezeket a zavaró hatásokat a komplex, nemlineáris és ismeretlen dinamika okozza.

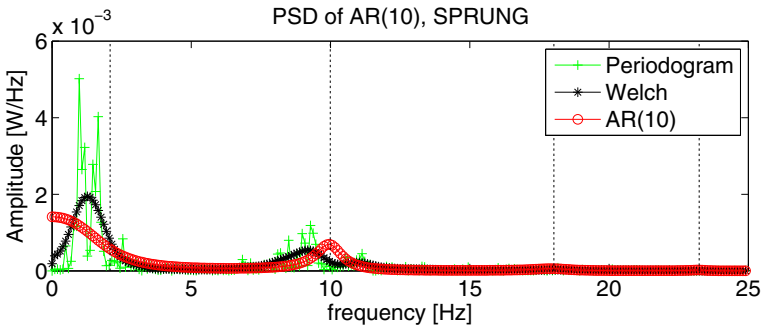
A fejezetben feltételezzük, hogy a mért kimeneteket egy lineáris időinvariáns dinamika hozza létre, amelyet látszólagos fehér zaj vezérel. Az elemzés célja olyan frekvencia módusokat találni, amelyek megegyeznek a felfüggesztési rendszerrel és meghatározzák a zavaró hatások által okozott többletdinamika rendjét.

A fejezet hátralévő részében az AR(p) és ARMA(p) modellidentifikációt mutatjuk be egy kiemelt útszakaszra és egy szenzorral a jobb első rugózott tömegnél.



5.3. ábra. ARMA modellek Akaike információs kritériuma a modell rendjének függvényében.

DOI: 10.15477/SZE.MMTDI.2017.007



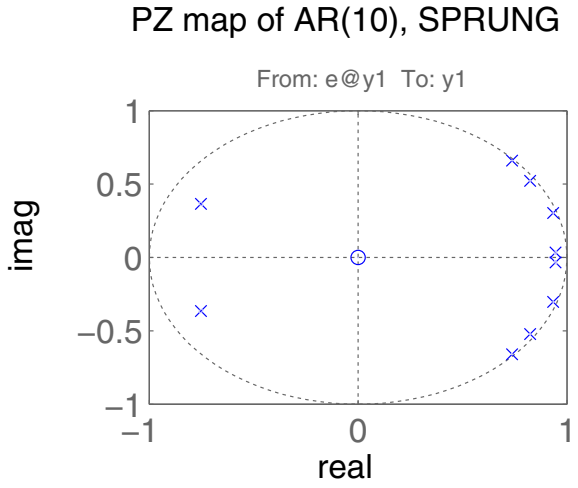
5.4. ábra. Az AR(10) modell teljesítményspektruma. Adatok: 1. szegmens, rugózott tömeg gyorsulása. Függőleges pontozott fekete vonalak mutatják az enyhén csillapított mód frekvenciáit.

Tekintsük először az AIC kritérium értékelését, minthogy a modell rendje nőtt. Megjegyzendő, hogy a fizikai (negyedjármű) modell ugyanolyan felépítésű, mint az ARMA(4). A modell rendek halmaza 4-től 500-ig terjed AR és 4-től 50-ig ARMA esetén. Ahogy látni fogjuk, jelentősen alacsonyabb fokú ARMA modellek megfelelő illeszkedést mutatnak az alacsony frekvenciájú tartományban, miközben csak sokkal magasabb rendű AR modellek biztosítanak hasonló illeszkedést. Ezek a különbségek a modell felépítésében az 5.2 és az 5.3 ábrán láthatóak.

Az 5.2 ábra azt szemlélteti, hogy az AIC minimuma elérhető AR(200) által, azaz $p = 200$ rendű modellel, de a kritérium értéke nem változik jelentősen a $p > 50$ tartományon.

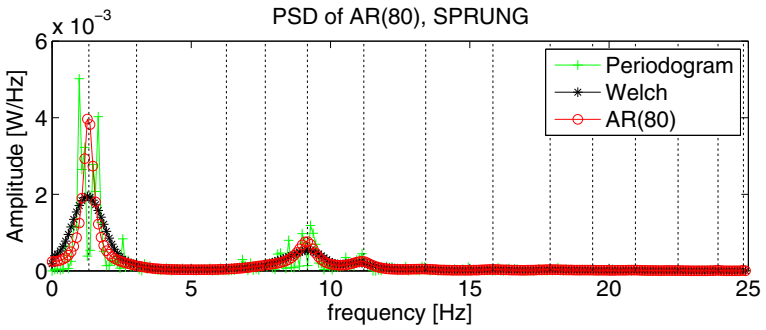
Az ARMA modellek AIC görbéje, lásd az 5.3 ábra, mutatja, hogy egy $p = 10$ modell rend már elég lehet az adatok magyarázatára és a magasabb rendű modellek hozzájárulása nem jelentős az AIC kritériumban.

A PSD becslés az identifikált AR és ARMA modelleken alapul, amelyeket az adatok periodogramjával és a Welch módszer által létrehozott egyenletes PSD becsléssel együtt ábrázolunk. A periodogramon alapuló adatok elemzését és a Welch módszert az előző fejezetben már tárgyaltuk.



5.5. ábra. Az AR(10) modell pólusai.

DOI: 10.15477/SZE.MMTDI.2017.007



5.6. ábra. Az AR(80) modell teljesítményspektruma. Adatok: 1. szegmens, rugózott tömeg gyorsulása. Függőleges pontozott fekete vonalak mutatják az enyhén csillapított mód frekvenciáit.

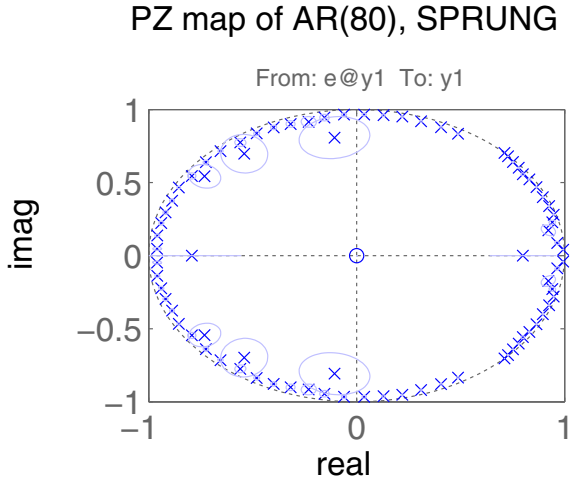
Mivel a fizikai rendszer rezonancia módjaira vagyunk kíváncsiak, ezért pozitív valós résszel rendelkező stabil komplex pólusokat választunk és az ezeknek megfelelő frekvenciákat számoljuk, azaz:

$$f_i = \frac{|\ln(z_i)|}{2\pi T_s}, \tag{5.8}$$

ahol z_i jelenti a diszkrét idejű modell komplex pólusát és $T_s = 1/f_s$ a mintavételezési idő. f_i az egységugrás válasszal ekvivalens (zérusrendű tartóval ekvivalens) folytonos idejű rezonancia mód frekvenciája.

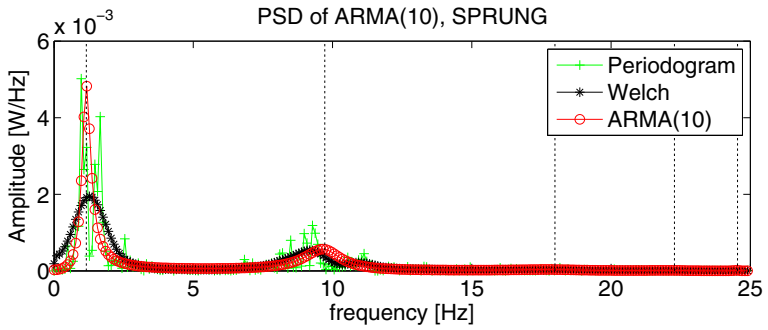
Az AR(10), AR(80) modell PSD becsléseit és a pólus frekvenciákat az 5.4 és az 5.6 ábrák mutatják be. Az ARMA(10) és ARMA(20) modellhez tartozó PSD becsléseket és a pólus frekvenciákat az az 5.8 illetve az 5.10 ábrák szemléltetik. Az ábrákon látható, hogy az AR(80) és ARMA(10) modellek hasonló illeszkedést biztosítanak az adatokhoz.

Az egyes modellekre a zérus-pólus elhelyezkedés az 5.5, az 5.7, az 5.9 és az 5.11 ábrán látható. A modell túlparametrizálását a komplex tartományban lévő pólusok elhelyezkedéséből



5.7. ábra. Az AR(80) modell pólusai.

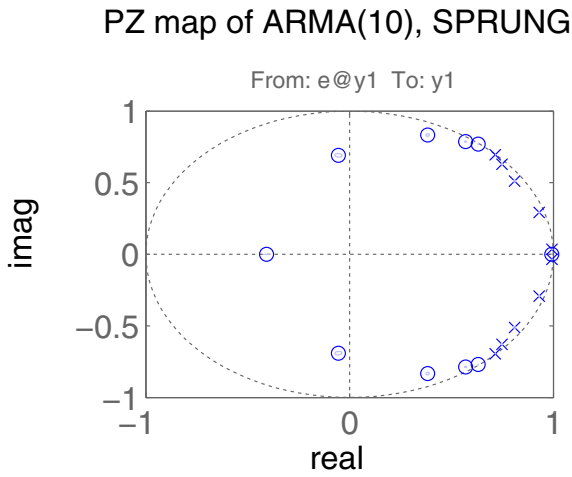
DOI: 10.15477/SZE.MMTDI.2017.007



5.8. ábra. Az ARMA(10) modell teljesítményspektruma. Adatok: 1. szegmens, rugózott tömeg gyorsulása. Függőleges pontozott fekete vonalak mutatják az enyhén csillapított mód frekvenciáit.

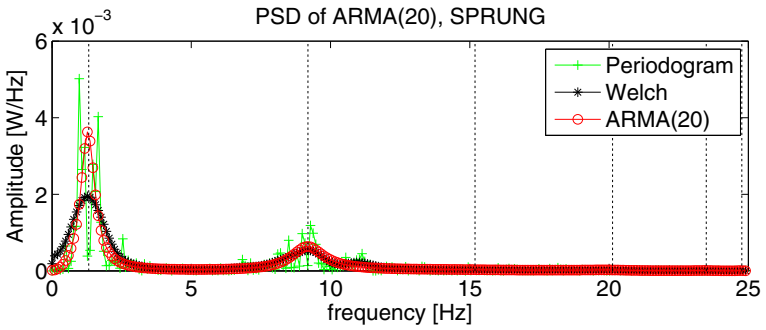
láthatjuk: ezek magas frekvenciáknál fordulnak elő, a Nyquist frekvencián kívül (közel az egységkörhöz, $\arg z_i$ a zérustól távol). Ezeknek a pólusoknak a konfidencia ellipszoidjai nagyobb bizonytalanságot tükröznek. ARMA modellek esetén zérus-pólus egyszerűsítés figyelhető meg, lásd az 5.9 és az 5.11 ábra. Másrészről a túlparametrizálás (pl. növekvő modell rend) sokkal pontosabb illeszkedést hoz alacsony frekvencia-tartományon (vesd össze az 5.8 és az 5.10 ábrákat).

Tekintsük a komplex pólusok rezonanciáit alacsony frekvencia-tartományban, $0-15$ Hz. Minden modellre, amelyre az AIC-t kiszámítottuk, a pozitív valós résszel rendelkező stabil komplex pólusokat kiválasztottuk és a kísérő frekvenciákat kiszámoltuk. Az AR modellek eredményeit az 5.12 ábra és az ARMA modellek eredményeit az 5.13 ábra foglalja össze. Minden modell rendhez minden rezonancia mód frekvenciáját ábrázoljuk. Látható, hogy AR modellekkel az alacsony frekvenciájú módok erősen nőnek a modell rendjével. Ezért az AR modell alapján nem elég, hogy következtetéseket vonjunk le a rendszer rezonancia módjairól. Ez állítja szembe ARMA modellekkel, ahol az identifikált módok száma maximum öt. Ha minden ARMA modellt egyidejűleg figyelembe veszünk, látható, hogy három mód mindenképpen jelen

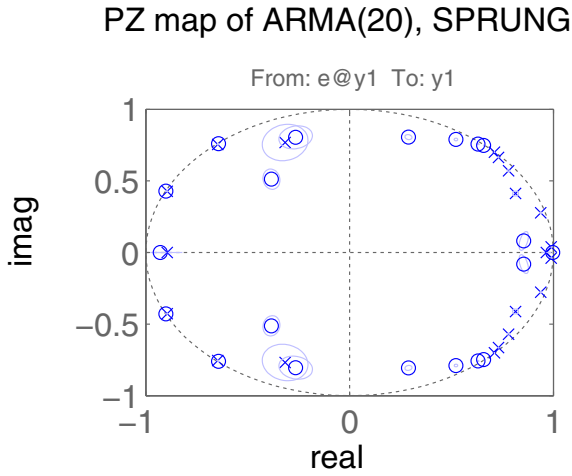


5.9. ábra. Az ARMA(10) modell zérus-pólus elhelyezkedése.

DOI: 10.15477/SZE.MMTDI.2017.007



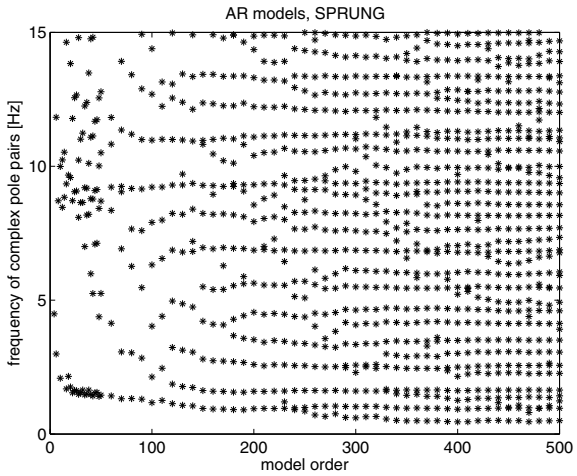
5.10. ábra. Az ARMA(20) modell teljesítményspektruma. Adatok: 1. szegmens, rugózott tömeg gyorsulása. Függőleges pontozott fekete vonalak mutatják az enyhén csillapított mód frekvenciáit



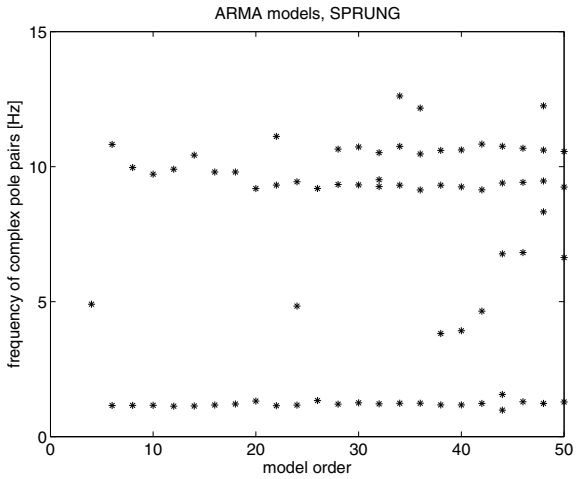
5.11. ábra. Az ARMA(20) modell zérus-pólus elhelyezkedése.

van a rendszerben, egy 1,5 Hz körül és kettő 10 Hz körül.

Az egyes mérésekre vonatkozó eredményeket az A.7 Függelék ábrái tartalmazzák.



5.12. ábra. Az azonosított rezonancia módok frekvenciái az egyes AR modellekre.



5.13. ábra. Az azonosított rezonancia módok frekvenciái az egyes ARMA modellekre.

5.3. A modellbizonytalanság hatása

Egy jármű felfüggesztésének egy egyszerűsített modelljében a kereszthatások elhanyagolásával a következő matematikai modell írható fel kerekenként

$$\ddot{z}_s = -\frac{k_s}{m_s}(\dot{z}_s - \dot{z}_u) - \frac{c_s}{m_s}(z_s - z_u), \tag{5.9}$$

$$\ddot{z}_u = -\frac{k_s}{m_u}(\dot{z}_u - \dot{z}_s) - \frac{c_s}{m_u}(z_u - z_s) - \frac{c_t}{m_u}(z_u - z_r) - \frac{k_t}{m_u}(\dot{z}_u - \dot{z}_r), \tag{5.10}$$

ahol z_s a rugózott tömeg, z_u a rugózatlan tömeg, és z_r az út pozíciójának függőleges komponense. Az egyenletek Laplace transzformálásával kapjuk a W_{su}, W_{us}, W_{ur} átviteli függvényeket:

$$z_s(s) = W_{su}(s)z_u(s) \tag{5.11}$$

$$z_u(s) = W_{us}(s)z_s(s) + W_{ur}(s)z_r(s), \tag{5.12}$$

$$W_{su}(s) = \frac{k_s s + c_s}{m_s s^2 + k_s s + c_s},$$

$$W_{us}(s) = \frac{k_s s + c_s}{m_u s^2 + (k_s + k_t)s + c_s + c_t},$$

$$W_{ur}(s) = \frac{k_t s + c_t}{m_u s^2 + (k_s + k_t)s + c_s + c_t}.$$

Hanyagoljuk el a gumi csillapítását, azaz $k_t = 0$. Ekkor

$$\begin{aligned} z_s(s) &= \frac{W_{su}(s)W_{ur}(s)}{1 - W_{su}(s)W_{us}(s)} z_r(s) \\ &= \frac{\frac{c_t}{m_u}(\frac{k_s}{m_s}s + \frac{c_s}{m_s})}{s^4 + s^3(\frac{k_s}{m_s} + \frac{k_s}{m_u}) + s^2(\frac{c_s}{m_s} + \frac{c_s}{m_u} + \frac{c_t}{m_u}) + s(\frac{k_s}{m_s}\frac{c_t}{m_u}) + \frac{c_s}{m_s}\frac{c_t}{m_u}} z_r(s) \end{aligned} \tag{5.13}$$

és

$$\begin{aligned} z_u(s) &= \frac{W_{ur}(s)}{1-W_{su}(s)W_{us}(s)} z_r(s) \\ &= \frac{\frac{c_t}{m_u}(s^2+\frac{k_s}{m_s}s+\frac{c_s}{m_s})}{s^4+s^3(\frac{k_s}{m_s}+\frac{k_s}{m_u})+s^2(\frac{c_s}{m_s}+\frac{c_s}{m_u}+\frac{c_t}{m_u})+s(\frac{k_s}{m_s}\frac{c_t}{m_u})+\frac{c_s}{m_s}\frac{c_t}{m_u}} z_r(s). \end{aligned} \tag{5.14}$$

A nevező polinom zérusai reális paraméterezés mellett komplexek. Ha rögzítjük a $\frac{c_t}{m_u}$ paramétert, akkor a többi paraméter hányados a nevező polinom együtthatói ismeretében egyértelműen meghatározhatók. A nevező polinom együtthatóit valós adatokból identifikált ARMA modellekből származtatjuk.

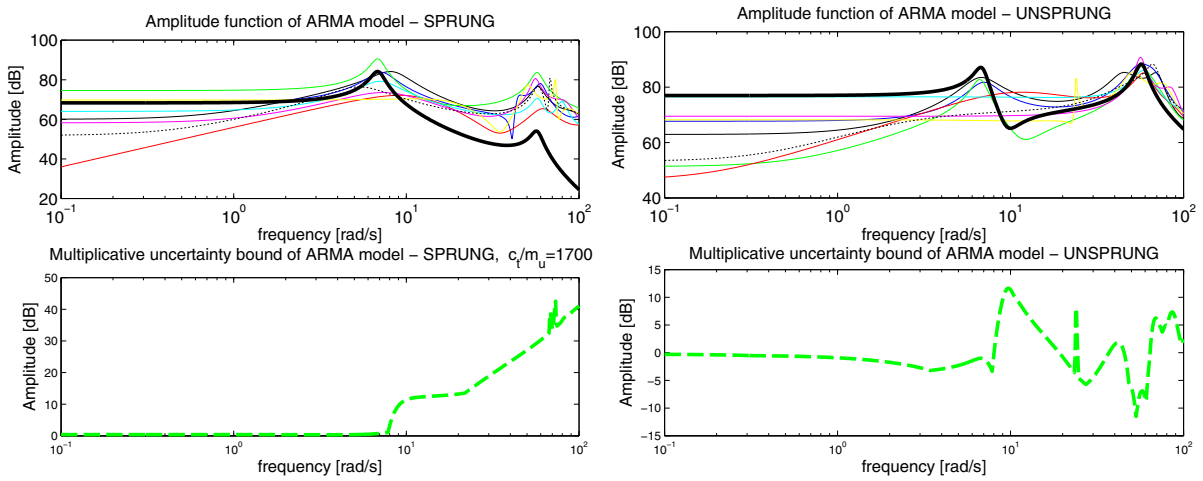
Láttuk, hogy a rugózott tömeg gyorsulásának ARMA(n) modelljei esetén a komplex póluspárokhoz tartozó 1 Hz és 8 Hz körüli frekvenciák invariánsak a modell rendjének változtatására, ha a rend elég magas. Feltételezzük ezekről, hogy azonosíthatók a fizikai negyedjármű modell sajátfrekvenciáival. Az identifikált 20-adrendű ARMA modellek e frekvenciákhoz tartozó pólusait kiválasztva megkapjuk a negyedjármű modell karakterisztikus egyenletét és abból a paraméter hányadosokat egy kivételével. A $\frac{c_t}{m_u}$ paramétert és a gerjesztés varianciáját úgy hangoljuk, hogy az ARMA modellek amplitúdómenetéhez a fizikai modell minél jobban illeszkedjen az 1 Hz-es és a 8 Hz-es csúcsoknál.

Az 5.14 ábrán vékony vonalakkal az ARMA(20) modellek amplitúdómenetei, vastag folytonos feketével a fizikai modell amplitúdómenete és szaggatott vastag feketével a modellekből számított multiplikatív bizonytalanság amplitúdókorlátja látható. A konkrét zajfolyamattól függően a paraméterekben és a modell átviteli függvényében jelentős eltérés lehetséges.

5.1. táblázat. Paraméter becslések az egyes mérések esetén

	1. mérés	2. mérés	3. mérés
k_s/m_s	7.9765	5.4052	2.4173
c_s/m_s	134.5017	108.9674	90.6437
k_s/m_u	4.8688	5.0037	6.6311
c_s/m_u	1.6014e+03	1.8602e+03	1.5422e+03
c_t/m_u	1700	1700	1700

Az eredményekből látható, hogy valós mérési adatokból a fizikai negyedjármű modellel nem lehet a rendszert identifikálni. Jelentős elhanyagolt dinamikával és mérési zajjal kell számolni. A fenti módszerrel a megfelelő mérést használva viszont a két szignifikáns csúcs frekvenciáját és amplitúdóját is jól visszaadja a modell.



5.14. ábra. Amplitudómenetek és multiplikatív bizonytalanság

5.4. Következtetések és kitekintés

Egy városi busz felfüggesztési rendszerét vizsgáltuk valós gyorsulásmérések AR és ARMA parametrikus spektrálanalízise alapján. Tapasztalatainkat és következtetéseinket az alábbiakban foglaljuk össze:

1. Modell struktúra identifikáció: az alacsonyabb rendű ARMA modellek jobb illeszkedést mutatott az adatokhoz mint az all-pole AR modellek.

2. Modell rend becslése: az Akaike Információs Kritériumot alkalmaztuk a modell rend becslésére. Jó adatilleszkedést értünk el a lényegesen magasabb rend ARMA modelljeivel, mint a felfüggesztési rendszer fizikai modellje által javasolt modell renddel. Ezt az identifikált modellben az elhanyagolt dinamikával magyarázzuk.

3. Fizikai modellstruktúrák identifikációja: a negyedjármű felfüggesztési modelljével azonos rendű ARMA(4) modell identifikációjánál kapott frekvencia tartománybeli tulajdonságok nem tükrözik a rendszer valódi frekvencia-tartománybeli viselkedését. Az alapcélokat tekintve az a következtetésünk, hogy a fizikai modellek identifikációját együttesen kell végrehajtani a bizonytalansági modellezéssel és az osztályozással.

DOI: 10.15477/SZE.MMTDI.2017.007

6. Tézisek

A mérések célja az autóbusz menetdinamikai jellemzőinek megismeréséhez alapot szolgáltató több ponton mért gyorsulás-jelek rögzítése volt különböző menetviszonyok között. A mérési céloknak megfelelően kiválasztott autóbusz típusa CREDO BN 12 (SOLO autóbusz) volt.

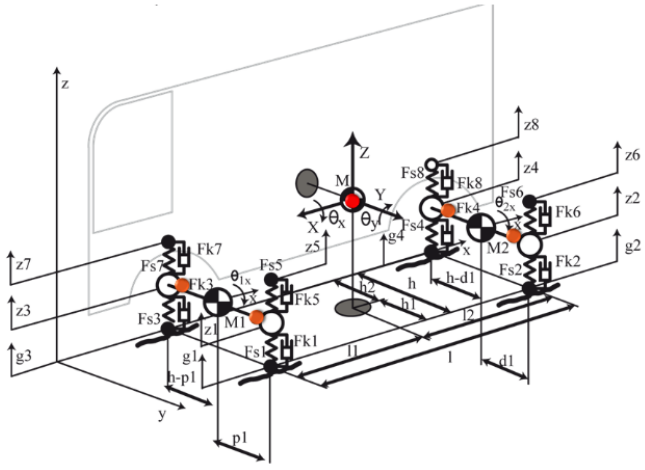
Az autóbuszon gyorsulásérzékelők az alábbi mérési elrendezésben kerültek rögzítésre: tengelycsonkonként Z tengelyirányú gyorsulás jeladók (négy darab) – az ábrán narancssárga színnel jelölve, az autóbusz súlypontjában X, Y, Z tengelyirányú gyorsulás jeladó (egy darab három tengelyes, vagy három darab egy tengelyes) – az ábrán piros színnel jelölve, a kocsiszekrényen az $5, 6, 7$ koordinátapontokon egy-egy függőleges gyorsulásadó, a tengelycsonkokhoz telepítettekkel azonos, Z tengelyirányban.

1. Tézis: [3.,4. és A.7. Fejezetek] Egy városi busz felfüggesztési rendszerét vizsgáltam valós gyorsulásmérések spektrálanalízise alapján.

1.1. Kidolgoztam egy mérési eljárást, a mintavételezés és az előzetes zajszűrés módját amely alkalmas a vertikális járműdinamika spektrális analíziséhez szükséges adatok felvételére, lásd a 6.1 és a 6.2 ábra. A 6.3 ábra mutatja az adatminta rögzítését.

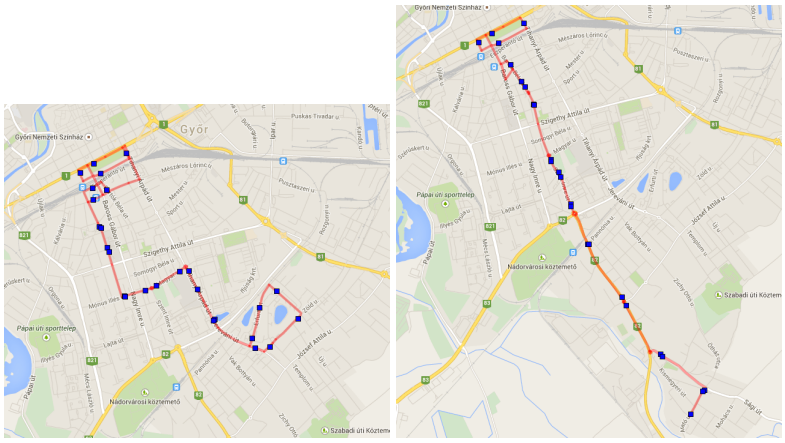
1.2. Eljárást javasoltam a spektrál sűrűség függvény becslésére, amely jelen esetben a mintavételezés, szűrés, FFT és Welch ablakolási módszer-alkalmazásából áll.

1.3. Megmutattam, hogy ezzel az eljárással azonosíthatók a jármű vertikális dinamikájának jellemző sajátfrekvenciái.



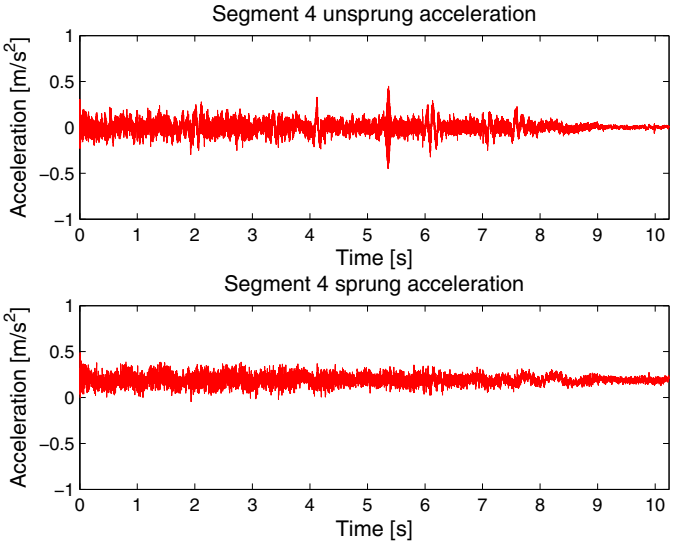
6.1. ábra. A mérőrendszer mérési pontjai a autóbusz mechanikai modelljén

DOI: 10.15477/SZE.MMTDI.2017.007



6.2. ábra. A 2-es és az 5-ös számú járat nyomvonala Győrben

1.4. Megmutattam, hogy a kapott eredmények alapján lehetővé válik a felfüggesztési rendszer útgerjesztés csillapításának és több utaskényelmi mutatónak a kiszámítása, lásd a 6.5 ábra.

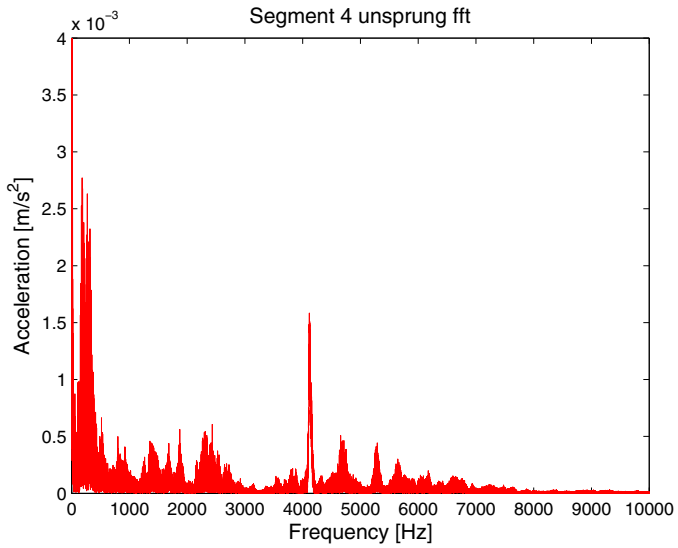


6.3. ábra. Mért időtartományi gyorsulási adatok jobboldalon elöl. Rugózatlan tömeg (fent) és rugózott tömeg (lent)

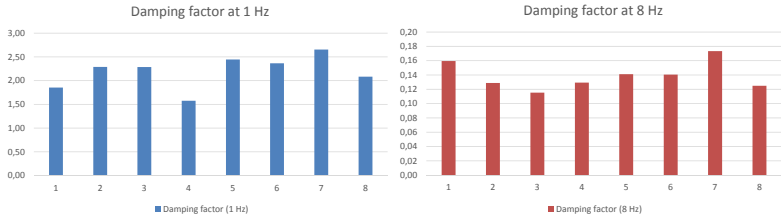
A valós paraméterezésű linearizált rendszernek két könnyű csillapítású módja van komplex póluspárokkal. Ezt abból fizikai magyarázatból várjuk, hogy a két tömeg mért függőleges gyorsulásainak a PSD-i két csúcsot mutatnak az átviteli függvény két változata alapján 1 és 8 Hz körül. Ezek a frekvenciák minden szakaszra megközelítőleg ugyanazok. A PSD megegyező amplitúdói elérhetők a Welch módszer alapján és látható a 6.5 ábrán.

A tézishez tartozó eredmények a [Sza08, Sza10b, Sza11a, Sza11b, Sza16a] publikációimban lettek részletesen kifejtve.

DOI: 10.15477/SZE.MMTDI.2017.007



6.4. ábra. Mért gyorsulási adatok frekvencia-tartományban – jobb első rugózatlan tömeg



6.5. ábra. 1 és 8 Hz-es csillapítási tényező számítása (Egynél nagyobb értékek mutatják az erősítéseket.)

2. Tézis: [5. és A.7. Fejezetek] A vertikális járműdinamika AR és ARMA modelljeinek identifikációja parametrikus spektrál–analízissel. A futómű sajátfrekvenciák meghatározása.

2.1. Modell struktúra identifikáció: megállapítottam, hogy a gyorsulásjelekből való identifikációban (nem mérhető útgerjesztésnél) az ARMA modellek alacsonyabb rend esetén is jobb illeszkedést mutattak az adatokhoz mint az AR modellek.

2.2. Modell rend becslésére az Akaike Információs Kritérium alkalmazását javasoltam. Jó adatilleszkedést értem el a lényegesen magasabb rendű ARMA modelljeivel, mint a felfüggesztési rendszer fizikai modellje által javasolt modell renddel. Ezt az identifikált modellben elhanyagolt dinamikával magyarázom.

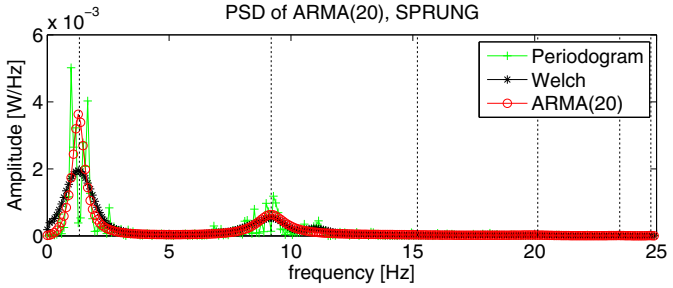
2.3. Az ARMA modellek pólus-térképei és a parametrikus spektrumok együttes használata alapján módszert javasoltam a futómű sajátfrekvenciák meghatározására, lásd az 5.10 és az 5.11 ábra..

2.4. Fizikai modellstruktúrák identifikációja: Megállapítottam, hogy a negyedjármű felfüggesztési modellel azonos rendű ARMA(4) modell identifikációjánál kapott frekvencia tartománybeli tulajdonságok nem tükrözik a rendszer valódi frekvencia-tartománybeli vi-

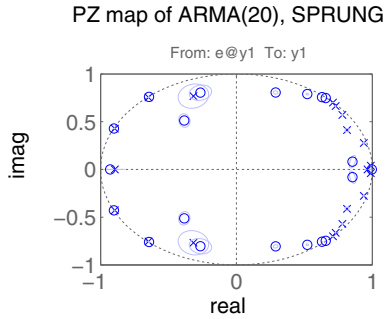
DOI: 10.15477/SZE.MMTDI.2017.007

selkedését. Az alapcélokat tekintve az a következtetésem, hogy a fizikai modellek identifikációját együttesen kell végrehajtani a bizonytalansági modellezéssel.

A tézishez tartozó eredmények a [Sza14, Sza16b] publikációimban lettek részletesen kifejtve.



6.6. ábra. Az ARMA(20) modell teljesítményspektruma. Adatok: 1. szegmens, rugózott tömeg gyorsulása. Függőleges pontozott fekete vonalak mutatják az enyhén csillapított mód frekvenciáit



6.7. ábra. Az ARMA(20) modell zérus-pólus elhelyezkedése.

DOI: 10.15477/SZE.MMTDI.2017.007

7. Összefoglalás

Az értekezésben a normál üzemi körülmények között közlekedő városi busz vertikális dinamikájának modellezését és a jármű rezgések spektrális tulajdonságainak analízisét tűztem ki célul.

A modellezésben az Euler–Lagrange módszer alapján kidolgoztam a jármű vertikális dinamikáját leíró mozgásegyenleteit, abból a célból, hogy azt a mérésekből identifikált modellek elsősorban frekvencia tartománybeli tulajdonságaival össze tudjuk hasonlítani. Ez az összehasonlítás a felfüggesztés irányításában gyakran használt negyedjármű modell verifikációja szempontjából fontos.

A méréshez kiválasztott autóbusz típusa CREDO BN 12 SOLO autóbusz volt. Kidolgoztam a mérőrendszer buszra való feltelepítésének módját és beállításait. Méréseket végeztünk mind egy általunk megadott útpályán, mind menetrendszerű útvonalakon. A normál üzemi körülmények között közlekedő városi buszon mért adatsorok igen zajosak, ezért a modellezés számára alkalmas mintavételi idő beállítása valamint az előszűrések megválasztása igen fontosak a későbbi feldogozások szempontjából.

A mért mintavételezett jeleket szűrés után nemparametrikus spektrál analízis, AR, ARMA modellezés és identifikáció valamint ezen modellek alapján parametrikus spektrálanalízis módszereivel értékeltem ki. A különböző útszakaszokon felvett véges mintákból a spektrális becslés célja a gyorsulásjelek teljesítmény sűrűség spektrumainak meghatározása volt. Mivel az útgerjesztés nem mérhető mennyiség, a gyorsulás mérések alapján AR és ARMA modelleket identifikáltunk. Ezek segítségével AR és ARMA spektrumokat számítottam a futóművek sajátfrekvenciáinak vizsgálatára.

Az identifikáció során azt tapasztaltam, hogy a fizikai modell- struktúráknak megfelelő modellek és a bennük szereplő fizikai paraméterek a gyorsulásjelekből közvetlenül nem becsülhetők megbízható módon. Ennek magyarázataként a valós üzemi körülmények között gerjesztett dinamika elhanyagolását valamint a nem mérhető útgerjesztésre vonatkozó modellezési feltételek igazolhatóságának hiányát tekinthetjük.

Az értekezés eredményei közül kiemelhetjük hogy az kidolgozott és bemutatott egy olyan mérési és modellezési eljárást, amely alkalmas a spektrális sűrűségfüggvények, az AR és ARMA modellek pólustérképei alapján járművek vertikális dinamikájának vizsgálatára, a futóművek lengéskényelmi paramétereinek, sajátfrekvenciáinak és a hozzájuk tartozó fizikai paraméterek meghatározására.

DOI: 10.15477/SZE.MMTDI.2017.007

8. Summary

The goal of this thesis is the modelling of the vertical dynamics of a commercial city bus and also the spectral analysis of the vibrations emerging on the wheels and the body of the vehicle.

Concerning modelling the equations that describes the vertical dynamics were provided based on the Euler-Lagrange method. This simplified model of the suspension system, the so called quarter car model, serves as references for evaluating in the frequency domain the models identified from the measurements.

The type of the city bus selected for the measurement was CREDO BN 12 SOLO. In this work it has been developed the measuring methodology and the settings of the data acquisition system installed on the bus. In order to test the behaviour of a commercial city bus, the vehicle was driven on two specific route in real traffic conditions. The measurements collected under normal operating conditions on urban bus lines were very noisy. Thus the setting of a proper sampling time and also the choice of the pre-filtering is very important for the future processing.

The measured signals has been evaluated in the frequency domain after a suitable sampling and filtering process by using nonparametric spectral analysis, AR and ARMA modelling and identification, and finally a parametric spectral analysis method based on the identified models. Since the road excitation was not measured, it was assumed that the measured outputs are generated by a linear time-invariant dynamics driven by a fictitious white noise process. The outputs are the vertical acceleration of the wheel axis and the chassis, respectively. The goal of the analysis is to characterize the main eigenfrequencies of the suspension system and its damping in amplitude and also to evaluate both the road and the suspension system in terms of passenger comfort.

AR and ARMA models has been considered to find the right structure for the systems. The right order of the models were estimated based on Akaike's information criterion and viewing the pole-zero map of the models. The parametric methods used in the thesis justify and extend the results obtained by non-parametric methods, and in this way, provide more accurate results for vibration analysis. It turns out that the models that corresponds to physical structures and the parameters contained in these models cannot be estimated reliably. This fact can be explained by the effect of the neglected dynamics and the lack of a valid model for the road disturbance.

One of the main conclusions of the investigations is that the quarter-car model structure based on first principles does not reflect the true frequency domain behaviour of the system. Thus the identification of the physical model must be complemented with a suitable uncertainty modelling and classification.

DOI: 10.15477/SZE.MMTDI.2017.007

A. Függelék

A.1. Lineáris időinvariáns rendszerek modellezése

Dinamikus rendszerek modellezése és identifikációja során gyakran alkalmazunk lineáris időinvariáns (LTI) input-output rendszerek-modelleket ahol a környezeti hatásokat sztochasztikus folyamatokkal reprezentáljuk, azaz feltesszük, hogy a megfigyelések (mérések) egy LTI rendszer additív zajjal terhelt kimenetei.

Mivel az esetek nagy részében mintavételezett rendszereink (adataink) vannak, kézenfekvő, hogy diszkrét idejű modelleket használunk:

$$y_t = v_t + \varepsilon_t \tag{A.1}$$

$$v_t = \sum_{k=1}^{\infty} g_k u_{t-k} \tag{A.2}$$

Ha q jelöli az előretolás (forward shift) operátorát, azaz $qu_t = u_{t+1}$, és feltesszük, hogy v_t egy LTI rendszer kimenete, akkor

$$v_t = \sum_{k=1}^{\infty} g_k (q^{-k} u_t) = G(q) u_t,$$

ahol

$$G(q) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k q^{-k}.$$

A $\{g_k\}_1^\infty$ sorozatot impulzus válasznak hívjuk, valamint a ε_t zajfolyamat egy másodrendű stacionárius sztochasztikus folyamat, amit az alábbiak valamelyike definiál:

i) az $R_\varepsilon(k) = E\{\varepsilon_{t+k}\varepsilon_t\}$ kovarianca függvény, ahol $E\{\varepsilon_t\} = 0, \forall t$;

ii) a $\Phi_\varepsilon(\omega) = \mathscr{F}\{R_\varepsilon(k)\}$ spektrális sűrűségfüggvény.

A jól ismert átviteli függvény a $\{g_k\}_1^\infty$ impulzus válasz Z-transzformáltja, azaz

$$G(z) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k z^{-k}.$$

DOI: 10.15477/SZE.MMTDI.2017.007

Praktikus okokból célszerű ezeket a modelleket újraparametrizálni véges számú

$$\theta \in \mathscr{D}_{\mathscr{M}} \subset \mathbb{R}^d$$

paraméter segítségével, és az identifikációs problémát erre a véges dimenziós halmazra megfogalmazni. Ekkor a modell alakja

$$y_t = G(q,\theta)u_t + \varepsilon_t$$

ahol a zajfolyamatot vagy az $R_\varepsilon(\tau)$ kovarianciasorozat, vagy pedig a $\Phi_\varepsilon(\omega)$ spektrális sűrűségfüggvény írja le. Ez a jellemzés egy $\mathscr{M}$ paraméterezett modell halmazt definiál, azaz egy modell struktúrát. Az $\mathscr{M}$ halmaz egy rögzített θ paraméteréhez tartozó elemét $\mathscr{M}(\theta)$ jelöli.

A.1.1. Zaj folyamatok modellezése

Ha adott egy ε_t másodrendű stacionárius sztochasztikus folyamat $R(\tau)$ kovarianciafüggvénye, akkor a kapcsolodó modellezési feladat megfogalmazaása a következő:

i) Keresünk egy LTI rendszert aminek a kimenete azonos kovarianciafüggvénnyel rendelkezik (gyenge realizáció, kovariancia faktorizáció), azaz a kovariancia függvényt akarjuk reprodukálni.

ii) Keresünk egy LTI rendszert aminek az ξ_t kimenetére igaz, hogy $\varepsilon_t \equiv \xi_t$ (erős realizáció), azaz ekkor nemcsak a kovariancia függvényt, hanem a mintavételezett folyamatot is reprodukáljuk.

Frekvencia tartományban, azaz ha a $\Phi(\omega)$ spektrális sűrűségfüggvény van megadva, az alábbi spektrális faktorizáción alapuló eredményt alkalmazhatjuk.

Feltéve, hogy $\Phi(\omega) > 0$ a $\cos\omega$ vagy $e^{i\omega}$ racionális függvénye, létezik egy $H(z)$ racionális függvény aminek nincsenek az egységkörön kívül pólusai és zérusai úgy, hogy

$$\Phi(\omega) = \lambda |H(e^{i\omega})|^2.$$

Ekkor az ε_t folyamat modellezhető egy $e_t \sim (0,\lambda)$ fehér zajon ható, $H(z)$ átviteli függvénnyel rendelekező, lineáris szűrő kimeneteként, azaz időtartományban

$$\varepsilon_t = H(q)e_t \triangleq \sum_{k=0}^{\infty} h_k e_{t-k},$$

ahol $e_t \sim (0,\lambda)$ a fehér zaj és

$$H(q) = 1 + h_1 q^{-1} + h_2 q^{-2} + \cdots \qquad (h_0 = 1).$$

DOI: 10.15477/SZE.MMTDI.2017.007

A.1.2. Átviteli függvények

Véges dimenziós LTI rendszereket, amelyek egységugrás válaszukkal vannak megadva, véges módon paraméterezhetünk az átviteli függvényeik segítségével. A megfelelő eltolás-operátor felhasználásával ezeknek a modelleknek időtartományi alakja

$$y_t = G(q,\theta)u_t + H(q,\theta)e_t, \quad e_t \sim (0,\lambda) \text{ fehér zaj},$$

ahol $H(q,\theta)$ egy stabil és inverz stabil rendszer, $G(q,\theta)$ pedig stabil. Ekkor a G és H rendszereket racionális függvényekként írhatjuk fel, mint

$$G(q) = \frac{B(q)}{A(q)}, \qquad H(q) = \frac{C(q)}{D(q)}.$$

Az így kapott modell struktúrát az identifikációs szakirodalomban még Box–Jenkins modellnek is nevezzük, azaz

$$y_t = \frac{B(q)}{A(q)}u_t + \frac{C(q)}{D(q)}e_t,$$

ami egy racionális átviteli függvény modell és egy ARMA zajmodell összege.

A.1.3. ARMA modellek

Az ARMA (AutoRegressive Moving Average) modellek gyakran használatosak az idősorok analízise során olyan stacionárius sztochasztikus folyamatok modellezésére, amelyek racionális sűrűség függvénnyel rendelkeznek. Ennek megfelelően egy ARMA modell racionális alakja

$$\varepsilon_t = \frac{C(q)}{D(q)} \qquad \text{or} \qquad D(q)\varepsilon_t = C(q)e_t$$

ahol

$$\begin{aligned} D(q) &= 1 + d_1 q^{-1} + \cdots + d_n q^{-n} && \text{az AR operátor} \\ C(q) &= 1 + c_1 q^{-1} + \cdots + c_m q^{-m} && \text{az MA operátor} \end{aligned}$$

és $e_t \sim (0,\lambda)$ egy diszkrét idejű fehér zaj folyamat.

Jelölje a továbbiakban ARMA(n,m) a

$$D(q)\varepsilon_t = C(q)e_t$$

$\deg D = n$, $\deg C = m$ és $e_t \sim (0,\lambda)$. Az ARIMA(n,d,m) folyamatokra:

$$D(q)\nabla^d \varepsilon_t = C(q)e_t,$$

DOI: 10.15477/SZE.MMTDI.2017.007

ahol $\nabla y_t = (1-q^{-1})y_t = y_t - y_{t-1}$.

A.1.4. ARX modellek

Azokat az AR modelleket, amelyeknek külső bemenetük van, ARX modelleknek nevezzük. Racionális leírás segítségével ezek megkaphatók abban a speciális esetben, amikor a zaj modell AR és mindkét tagnak azonos nevezője van. Ennek megfelelően az ARX modell struktúra:

$$y_t = \frac{B(q)}{A(q)}u_{t-d} + \frac{1}{A(q)}e_t,$$

ahol $\deg A = n$, $\deg B \leq n-1$ és d a bemeneten jelentkező diszkrét idejű késleltetés.

Az ARX modellek egy hasznos tulajdonsága, hogy felírhatók egy, a paraméterekben lineáris alakban, vagyis A és B polinomokkal az alábbiak szerint:

$$y_t + a_1 y_{t-1} + \cdots + a_n y_{t-n} = b_1 u_{t-1} + \cdots + b_n u_{t-n} + e_t.$$

Ha az ARX modell paramétereit

$$\theta_{AB} = [b_1, \ldots, b_n; a_1, \ldots, a_n]^T$$

jelöli, és

$$\varphi(u,y,t) = [u_{t-1}, \ldots, u_{t-n}; -y_{t-1}, \ldots, -y_{t-n}]^T$$

akkor a rendszer kimenete egy lineáris kombinációja a legutolsó néhány be illetve kimeneti megfigyelésnek, vagyis

$$y_t = \varphi'(u,y,t)\theta_{AB} + e_t.$$

A.1.5. ARMAX modellek

Az ARX modellekhez hasonlóan külső bemenő jelekkel ellátott ARMA modelleket ARMAX modelleknek nevezünk. Ennek alapján az ARMAX modell struktúra alakja:

$$y_t = \frac{B(q)}{A(q)}u_t + \frac{C(q)}{A(q)}e_t,$$

ahol $\deg A = \deg C = n$ és $\deg B \leq n-1$.

Az ARMAX modellek az alábbi alakban is felvehetők:

$$A(q)y_t = B(q)u_t + C(q)e_t,$$

DOI: 10.15477/SZE.MMTDI.2017.007

azaz

$$y_t + a_1 y_{t-1} + \cdots + a_n y_{t-n} = b_1 u_{t-1} + \cdots + b_n u_{t-n} + e_t + c_1 e_{t-1} + \cdots + c_n e_{t-n}.$$

Ha a paraméter vektort

$$\theta_{ABC} = [b_1, \ldots, b_n; a_1, \ldots, a_n; c_1, \ldots, c_n]^T$$

akkor

$$y_t = \varphi'_{ABC}(u, y, t)\theta_{ABC} + e_t,$$

vagyis az ARMAX modell t-beli kimenete a legutolsó néhány be illetve kimeneti megfigyelés, illetve forrás zaj lineáris kombinációjaként állítható elő. Ezért az ARMAx modelleket pszeudo-lineáris regressziós modelleknek is nevezik.

A.2. Predikciós hiba minimalizálásán alapuló paraméterbecslés

Az alábbiakban az úgynevezett predikciós hibán alapuló – Prediction Error (PE) – módszert, lásd [10], [28], vázoljuk fel. Ezekben az eljárásokban a rendszermodellek játsszák el a prediktorok szerepét.

A modell segítségével vezetjük le a legkisebb négyzetek – Least Mean Squares (LMS) – elvén alapuló legjobb prediktort. Feltételezzük, hogy a forrás zaj független, azonos eloszlású valószínűségi változó minden t-re. Vannak esetek amikor még a normális eloszlást is feltételezzük.

Ezekkel a feltevésekkel az $\hat{y}(t|\theta) = Ey_t|Y^{t-1}, U^{t-1} \triangleq \hat{y}_{t|t-1}$ LMS prediktor a kimenet múltbeli Y^{t-1}, U^{t-1} adatokból számolt feltételes várható értéke.

Tekintsük az alábbi általános racionális átviteli függvényekből álló modell halmazt:

$$y_t = G(q)u_t + \varepsilon_t,$$

ahol a ε_t zaj folyamat végtelen mozgó átlag (FIR) reprezentációja

$$\varepsilon_t = H(q)e_t = \left(\sum_{k=0}^{\infty} h_k q^{-k}\right) e_t.$$

DOI: 10.15477/SZE.MMTDI.2017.007

A kimenet egylépéses előrehaladó becslése felírható mint

$$\begin{aligned}\hat{y}_{t|t-1} = E\{y_t|Y_{t-1},U_{t-1}\} &= G(q)u_t + E\{\varepsilon_t|Y^{t-1},U^{t-1}\} \\ &= G(q) + \hat{\varepsilon}_{t|t-1}.\end{aligned}$$

Mivel most csak egylépéses becsléseket használunk, ezért a $\hat{\varepsilon}_t = \hat{\varepsilon}_{t|t-1}, \hat{y}_t = \hat{y}_{t|t-1}$ egyszerüsítő jelölésekkel élünk.

A zaj folyamat egylépéses előrehaladó becslése

$$\begin{aligned}\hat{\varepsilon}_t = E\{\varepsilon_t|Y^{t-1},U^{t-1}\} &= E\left\{\sum_{k=0}^{\infty} h_k e_{t-k}|Y^{t-1},U^{t-1}\right\} \\ &= E\left\{e_t + h_1 e_{t-1} + h_2 e_{t-2} + \cdots|Y^{t-1},U^{t-1}\right\}.\end{aligned}$$

Mivel az e_t valószínűségi változó független a múltbeli kimenetektől, ezért

$$\begin{aligned}E\left\{e_t|Y^{t-1},U^{t-1}\right\} &= 0, \\ E\left\{e_{t-k}|Y^{t-1},U^{t-1}\right\} &= \hat{e}_{t-k}, \qquad k = 1,2,\ldots,\end{aligned}$$

és így $\hat{e}_{t-1}, \hat{e}_{t-2}, \ldots$ becsülhető a $(y_{t-1}, u_{t-1}, \ldots)$ múltbeli adatokból felhasználva az

$$\hat{e}_{t-k} = H^{-1}(q)[y_{t-k} - G(q)u_{t-k}], \qquad k = 1,2,\ldots$$

összefüggést.

Ekkor az $\hat{\varepsilon}_t$ becslés felírható mint

$$\hat{\varepsilon}_t = \big[H(q) - 1\big]\hat{e}_t = \frac{H(q)-1}{H(q)}\hat{\varepsilon}_t(\theta) = \big[1 - H^{-1}(q)\big]\hat{\varepsilon}_t,$$

ami a becsült zaj hozzájárulásának végtelen AR reprezentációjaként is interpretálható.

Mivel $\hat{\varepsilon}_t$ a múltbeli zaj realizációktól függ, ezért ezek, adott θ esetén, megadhatók mint:

$$\hat{\varepsilon}_k = y_k - G(q)u_k, \qquad k = 1,2,\ldots,t-1.$$

Végezetül megkapjuk a

$$\hat{\varepsilon}_t = \big[1 - H^{-1}(q)\big]\big[y_t - G(q)u_t\big]$$

becslést és így a kimenet egylépéses előrehaladó becslése

$$\hat{y}_{t|t-1} = G(q)u_t + \hat{\varepsilon}_t = H^{-1}(q)G(q)u_t + \big[1 - H^{-1}(q)\big]y_t$$

lesz, azaz $\hat{y}_{t|t-1}$ megkapható a múltbeli input/output megfigyelésekből.

A frekvencia tartománybeli átviteli $G(z), H(z)$ függvényekre adódik, hogy stabil prediktor

DOI: 10.15477/SZE.MMTDI.2017.007

esetén $G(z)$-nek stabilnak, $H(z)$-nak pedig inverz stabilnak kell lenni.

A prediktorok kiszámításához végtelen múltbeli adat szükséges. Általában az $u_t = 0$ ha $t < 0$ és alkalmazhatjuk az $y_{-1} = y_{-2} = \cdots = 0$ pragmatikus feltevést, mivel a prediktor stabilitása biztosítja az ismeretlen kezdeti értékek hatásának lecsengését a kimeneten.

A predikciós hiba alakja:

$$\varepsilon(t) = y_t - \hat{y}_{t|t-1} = H^{-1}(q)[y_t - G(q)u_t].$$

Ha a $H(q), G(q)$ átviteli függvények paraméterei az ismeretlen változók, akkor a predikciós hiba függ θ-tól, azaz

$$\varepsilon(t,\theta) = H^{-1}(\theta,q)\left[y_t - G(\theta,q)u_t\right].$$

$\varepsilon(t,\theta)$ az egylépéses előrehaladó becslési hiba.

A θ paraméter becslésére alkalmas eljárás lehet a következő:

1. Adott $Z^N = [y_1, u_1, \ldots, y_N, u_N]$ mérésekkel számítsunk ki egy olyan $\hat{\theta}_N$ becslést, amelyre a $\varepsilon(t,\hat{\theta}_N), t = 1,\ldots,N$, predikciós hiba sorozat a lehető legkisebb legyen. Ez az elv vezet el az úgynevezett PE minimalizáló módszerekhez és, a modell parametrizálásától függően, a különféle legkisebb négyzetes becslési eljárásokhoz.

2. Adott $Z^N = [y_1, u_1, \ldots, y_N, u_N]$ mérésekkel számítsunk ki egy olyan $\hat{\theta}_N$ becslést, amelyre $\varepsilon(t,\hat{\theta}_N)$, $t = 1,\ldots,N$ a leginkább korrelálatlan legyen. Ez az elv vezet a különféle segédváltozós becslési eljárásokhoz.

A PE eljárás minimalizálandó kritériumfüggvényének általában

$$V_N(\theta, Z^N) = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} \ell(\varepsilon(t,\theta)),$$

választjuk, ahol $\ell(.)$ egy skalár értékű függvény.

A becsült PE paraméter a következő:

$$\hat{\theta}_N = \hat{\theta}_N(Z^N) = \arg\min_{\theta\in\mathscr{D}} V_N(\theta, Z^N),$$

ahol tipikusan a

$$\ell(\varepsilon(t,\theta)) = \frac{1}{2}\varepsilon^2(t,\theta)$$

választással élünk.

DOI: 10.15477/SZE.MMTDI.2017.007

A.3. Legkisebb négyzetek (LS) módszerén alapuló paraméterbecslés

A rendszermodell általános alakja:

$$y(t) = G(q)u(t) + e(t) \tag{A.3}$$

ahol $G(q)$ átviteli függvény és q az eltolás operátor. Például:

$$G(q) = \frac{B(q)}{A(q)} \tag{A.4}$$

ahol $A(q)$ és $B(q)$ polinomok az eltolás operátor szerint a következő alakúak:

$$A(q) = 1 + a_1 q^{-1} + a_2 q^{-2} + \ldots + a_n q^{-n} \tag{A.5}$$
$$B(q) = b_1 q^{-1} + b_2 q^{-2} + \ldots + b_m q^{-m} \tag{A.6}$$

A modell úgynevezett ARX struktúrája

$$A(q)y(t) = B(q)u(t) + e(t), \tag{A.7}$$

ahol

$$B(q) = b_1 q^{-1} + b_2 q^{-2} \tag{A.8}$$
$$A(q) = 1 + a_1 q^{-1} + a_2 q^{-2}. \tag{A.9}$$

A modell struktúráját a kimenet korábbi kimeneteinek száma, a korábbi bemenetek száma és a bemenőjel eltolása határozza meg:

$$y(t) + a_1 y(t-1) + a_2 y(t-2) = b_1 u(t-1) + b_2 u_2(t-2) + e(t) \tag{A.10}$$

ahol a_1, a_2, b_1, b_2 a modell paraméterei. Átrendezve:

$$y(t) = -a_1 y(t-1) - a_2 y(t-2) + b_1 u(t-1) + b_2 u_2(t-2) + e(t) \tag{A.11}$$

A paraméterbecslés eredménye:

$$(1 + \hat{a}_1 q^{-1} + \hat{a}_2 q^{-2}) y(t) = (\hat{b}_1 q^{-1} + \hat{b}_2 q^{-2}) u(t) \tag{A.12}$$

ahol $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{b}_1, \hat{b}_2$ a modell becsült paraméterei. A paraméterbecslés modellje kifejtve a követ-

DOI: 10.15477/SZE.MMTDI.2017.007

kező:

$$y(t)+\hat{a}_1 y(t-1)+\hat{a}_2 y(t-2)=\hat{b}_1 u(t-1)+\hat{b}_2 u(t-2) \tag{A.13}$$

A modell alapján a kimenőjel t-edik értékére becslés adható:

$$\hat{y}(t)=-\hat{a}_1 y(t-1)-\hat{a}_2 y(t-2)+\hat{b}_1 u(t-1)+\hat{b}_2 u(t-2) \tag{A.14}$$

Az előrejelzés hibája:

$$\varepsilon(t)=y(t)-\hat{y}(t) \tag{A.15}$$

minden t-re.

Az n-edrendű ARX modell alakja:

$$\begin{aligned} y(t) =& -a_1 y(t-1)-a_2 y(t-2)-\ldots-a_n y(t-n)+ \\ &+b_1 u(t-1)+b_2 u(t-2)+\ldots+b_n u(t-n)+e(t) \end{aligned} \tag{A.16}$$

Vezessük be a következő jelölést:

$$\phi(t)=\begin{bmatrix} -y(t-1) & \ldots & -y(t-n) & u(t-1) & \ldots & u(t-n) \end{bmatrix}^T \tag{A.17}$$

$$\theta=\begin{bmatrix} a_1 & \ldots & a_n & b_1 & \ldots & b_n \end{bmatrix}^T \tag{A.18}$$

ahol ϕ a mért jelek, θ a paraméterek halmaza. A kimenőjel:

$$y(t)=\phi^T(t)\theta+e(t) \tag{A.19}$$

$$y(t+1)=\phi^T(t+1)\theta+e(t+1) \tag{A.20}$$

$$\ldots$$

$$y(t+N)=\phi^T(t+N)\theta+e(t+N) \tag{A.21}$$

A modell kompakt alakja:

$$Y=\Phi\theta+\varepsilon(N,\theta) \tag{A.22}$$

DOI: 10.15477/SZE.MMTDI.2017.007

ahol

$$Y = \begin{bmatrix} y(t) & y(t+1) & \dots & y(t+N) \end{bmatrix}^T, \tag{A.23}$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} \phi(t) & \phi(t+1) & \dots & \phi(t+N) \end{bmatrix}^T, \tag{A.24}$$

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} e(t) & e(t+1) & \dots & e(t+N) \end{bmatrix}^T \tag{A.25}$$

$$\theta = \begin{bmatrix} a_1 & \dots & a_n & b_1 & \dots & b_n \end{bmatrix}^T \tag{A.26}$$

Az LS becslés azt a paramétervektort keresi, amelynél az $\varepsilon(t)$ hiba négyzetösszege a legkisebb.

Összegzésül: az ARX modell struktúrához rendelt LS paraméterbecslési eljárásban a modell felírható az alábbi, paraméterekben lineáris alakban (lineáris regresszió)

$$y_t = \Phi(u,y,t)\theta + \varepsilon_t.$$

Az egylépéses előremutató becslés, vagyis y_t feltételes várható értéke a múltbeli $Z^N = [Y^N, U^N]$ adatok ismeretében,

$$\hat{y}(t|\theta) = E\{y_t|Y^{t-1}, U^{t-1}, \theta\} = \Phi(u,y,t)\theta,$$

az ehhez tartozó predikciós hiba alakja pedig:

$$\varepsilon(t,\theta) = y_t - \hat{y}(t|\theta) = y_t - \Phi(u,y,t)\theta.$$

A θ paraméterre vonatkozó LS kritériumot – fix modell rendekkel – a következő alakban definiáljuk:

$$J(\theta) = \sum_{t=1}^{N} e(t,\theta)^2 \tag{A.27}$$

ami skaláris szorzat alakban is felírható:

$$J(\theta) = \varepsilon(t,\theta)^T \varepsilon(t,\theta), \tag{A.28}$$

ahol θ a paramétereket tartalmazó vektor. Az LS becslés egy optimalizáló eljárás, melynek során a paraméterbecslési eljárás eredményét a következő költségfüggvény minimalizálásával kapjuk:

$$\hat{\theta} = arg\min_{\theta} J(\theta). \tag{A.29}$$

DOI: 10.15477/SZE.MMTDI.2017.007

Az LS kritérium kifejtve:

$$J(\theta) = \varepsilon^T \varepsilon = (Y - \Phi\theta)^T (Y - \Phi\theta) = \\ = Y^T Y - \theta^T \Phi^T Y - Y^T \Phi\theta + \theta^T \Phi^T \Phi\theta. \tag{A.30}$$

A minimum parciális deriválttal számítható:

$$J(\theta) = \left[\frac{\partial J}{\partial \theta_i}\right] = -2Y^T \Phi + 2\theta^T \Phi^T \Phi. \tag{A.31}$$

Az optimális megoldás:

$$\Phi^T Y = \Phi^T \Phi \hat{\theta}_{LS}, \tag{A.32}$$

$$\hat{\theta}_{LS} = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T Y, \tag{A.33}$$

amit az LS becslésre vonatkozó normál-egyenletnek nevezzük.

A gyakorlati alkalmazásokból ismert tény, hogy a becslési hiba az idő függvényében egyre nagyobb értékeket vesz fel. Ezért a becslési hiba súlyozását is érdemes bevinni a kritériumba.

$$J(\theta) = \sum_{t=1}^{N} w(t) e^2(t,\theta) = \varepsilon(t,\theta)^T W \varepsilon(t,\theta) \tag{A.34}$$

ahol $w(k)$, illetve W súlyozó tényező. Abban a tartományban, ahol nagyra választjuk, a becslés pontosabb lesz, mint ahol kisebbre választjuk. A normálalak összefüggése a következőképpen változik.

$$\Phi^T W Y = \Phi^T W \Phi \hat{\theta}_{WLS} \tag{A.35}$$

$$\hat{\theta}_{WLS} = (\Phi^T W \Phi)^{-1} \Phi^T W Y \tag{A.36}$$

Ezt a kifejezést a súlyozott LS becslésre vonatkozó normál-egyenletnek nevezzük.

A becsült modell validáció vizsgálatára a gyakorlatban elterjedt módszer a hiba statisztikai vizsgálata, amikor is olyan kérdésekre várunk választ, mint: milyen a mért jel becsült jellel való illesztése, illetve mennyire mondható el az ε jelről a fehér zaj tulajdonság.

A.3.1. LS becslés tulajdonságai

Az alábbiakban az LS becslés tulajdonságait vizsgáljuk SISO rendszerre, heurisztikus megközelítésben. Emlékeztetőül, a paraméterek LS becslését a

$$\hat{\theta}_N^{LS} = \arg\min_{\theta} V_N(\theta, Z^N) = \left[\frac{1}{N}\sum \varphi_t \varphi_t'\right]^{-1} \left[\frac{1}{N}\sum \varphi_t y_t\right]$$

DOI: 10.15477/SZE.MMTDI.2017.007

formula adja meg. Ha

$$F = \begin{bmatrix} \varphi_1' \\ \vdots \\ \varphi_N' \end{bmatrix}; \qquad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}$$

akkor

$$\hat{\theta}_N^{LS} = (F'F)^{-1}F'Y.$$

Tegyük fel, hogy létezik egy valódi modell, ami az alábbi egyenletnek megfelelő adatokat generál:

$$y_t = \varphi_t'\theta_0 + \varepsilon_t.$$

Ekkor az LS becslés által szolgáltatott paraméter

$$\hat{\theta}_N^{LS} = R_N^{-1}\frac{1}{N}\sum \varphi_t'[\varphi_t\theta_0 + \varepsilon_t] = \theta_0 + R_N^{-1}\frac{1}{N}\sum \varphi_t'\varepsilon_t,$$

ahol $R_N = F'F$.

Azt szeretnénk, hogy a $\hat{\theta}_N^{LS}$ becslésre teljesüljenek az alábbi feltételek:

1. $\hat{\theta}_N^{LS}$ értéke legyen közel θ_0 értékéhez.
2. Ahogyan N nő, $\hat{\theta}_N$ legyen egyre közelebb θ_0-hoz (konszisztencia).

Tegyük fel, hogy az u_t bemenet kvázi stacionárius,

$$\hat{R}_u(\tau) = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} u_{t+\tau}u_t \quad \rightarrow \quad R_u(\tau) = E\{u_{t+\tau}u_t\}$$

ekkor

$$R_N \rightarrow R \text{ egy valószínűséggel, ha } N \rightarrow \infty \qquad R = E\{\varphi_t\varphi_t'\}$$
$$\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\varphi_t\varepsilon_t \rightarrow h \text{ egy valószínűséggel, ha } N \rightarrow \infty \qquad h = E\{\varphi_t\varepsilon_t\}$$
$$\hat{\theta}_N^{LS} \rightarrow \theta_0 + (R)^{-1}h \text{ ha } N \rightarrow \infty.$$

Konszisztencia:

$$\hat{\theta}_N^{LS} \rightarrow \theta_0 \text{ as } N \rightarrow \infty.$$

Az LS becslés konszisztencia feltételei az alábbiakban foglalhatók össze:

i) R nem szinguláris. Ennek garantálására $\{u_t\}$-nek perszisztensen gerjesztőnek (persistently exciting) kell lenni.

ii) $h = 0$ implikálja, hogy

   a) ε_t fehér zaj,

DOI: 10.15477/SZE.MMTDI.2017.007

b) u_t és ε_t nem korrelált.

Ha ezek a feltételek teljesülnek, akkor bizonyítható, hogy

$$\sqrt{N}(\hat{\theta}_N^{LS} - \theta_0) \to \mathcal{N}(0, \lambda_0 R^{-1}),$$

ahol $\lambda_0 = E\{\varepsilon_t^2\}$ a ε_t szórásnégyzete.

A paraméterek kovariancia mátrixa felírható, mint

$$cov\,\hat{\theta}_N^{LS} \sim \frac{1}{N} R^{-1}.$$

Véges minta esetén R alakja

$$\begin{aligned}
\hat{R}_N &= \hat{\lambda}_N [\frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N} \varphi(t, \hat{\theta}_N^{LS}) \varphi'(t, \hat{\theta}_N^{LS})]^{-1} \\
&= \hat{\lambda}_N [\frac{1}{N} (F'F)^{-1}, \\
\hat{\lambda}_N &= \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N} \varepsilon^2(t, \hat{\theta}_N^{LS}).
\end{aligned}$$

További részletekért lásd [11], [30].

A.4. Maximum Likelihood becslés

Az úgynevezett maximum likelihood (ML) becslő a megfigyelt esemény valószínűségét maximalizálja, részletekért lásd például [10] és [30].

A.4.1. Az ML becslés elve

Tegyük fel, hogy adott egy mintasorozat:

$$y^N = \{y_1, y_2, \ldots, y_N\}, \qquad y^N \in \mathbb{R}^N,$$

aminek valószínűségi eloszlásfüggvénye

$$f(\theta; x_1, \ldots, x_N) = f_y(\theta; x^N),$$

ahol θ az ismeretlen, $\dim \theta = p$, paraméter vektor.

A megfigyelt y^N mintaelemek együttes valószínűségi sűrűségfüggvénye a konkrét megfigyelt y_*^N értékek behelyettesítése után az ismeretlen θ paraméter egy determinisztikus függvénye, amelyet

$$L(\theta) = f_y(\theta; y_*^N),$$

DOI: 10.15477/SZE.MMTDI.2017.007

likelihood függvénynek nevezünk.

A maximum likelihood becslés az a

$$\theta_{ML}(y_*^N) = \arg\max_{\theta} f_y(\theta; y_*^N)$$

érték, amely az együttes valószínűségi sűrűségfüggvényt maximalizálja.

A.4.2. Valószínűségi modellek likelihood függvényei

Legyen a paraméterezett modell egy egylépéses prediktor:

$$\mathscr{M}(\theta) : \hat{y}(t|\theta) = g(t, Z^{t-1}; \theta) = E\{y_t | Y_{t-1}^-, U_t^-; \theta\};$$

Ekkor a predikciós hiba

$$\varepsilon(t,\theta) = y_t - \hat{y}(t|\theta),$$

ahol $\varepsilon(t,\theta)$, $t = 1,2,\ldots$ független valószínűségi változók, amelyeknek $f_e(x,t;\theta)$ a valószínűségi sűrűségfüggvénye. Ezekkel a feltevésekkel $\mathscr{M}(\theta)$ egy valószínűségi modell.

Amennyiben adott egy determinisztikus u^N sorozat, az y^N együttes valószínűségi sűrűségfüggvénye

$$f(\theta; y^N) = \prod_{t=1}^{N} f_e(\varepsilon(t,\theta), t; \theta).$$

Legyen továbbá

$$\ell(\varepsilon, t; \theta) = -\log f_e(\varepsilon, t; \theta).$$

Ekkor a θ paraméter ML becslése

$$\theta_{ML}(y_*^N) = \arg\min_{\theta} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N} \ell(\varepsilon(t,\theta), t; \theta),$$

vagyis az ML becslés a PE becslők egy speciális esete.

A.4.3. SISO Gauss eloszlású eset

Tegyük fel, hogy a forrászaj egy Gauss eloszlású sorozat, $e_t \sim \mathscr{N}(0, \lambda_0)$. Ekkor a predikciós hiba is Gauss eloszlású, az együttes valószínűségi sűrűségfüggvény pedig

$$f(\theta; y^N) = \prod_{t=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\lambda} \exp\left\{-\frac{x^2}{2\lambda^2}\right\} = (2\pi)^{-N/2} \lambda^{-N} \exp\left\{-\frac{x^2}{2\lambda^2}\right\}.$$

Az együttes valószínűségi függvény negatív logaritmusa

$$V_N(\theta) = V_N(\theta, \lambda, Z^N) = -\frac{1}{N} \log L_N(\theta, \lambda, Z^N),$$

DOI: 10.15477/SZE.MMTDI.2017.007

ahol

$$L_N(\theta,\lambda,Z^N) = (2\pi)^{-N/2}\lambda^{-N}\exp\left\{-\frac{\varepsilon(t,\theta)^2}{2\lambda^2}\right\}.$$

Felhasználva, hogy $\partial V_N/\partial\lambda = 0$ adódik

$$\frac{\partial V_N}{\partial\lambda} = \frac{\log 2\pi}{2} + \frac{\log\lambda}{2} + \frac{1}{2\lambda^2}\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\varepsilon^2(t,\theta) = 0$$

aminek eredményeképpen

$$\lambda_N^2(\theta) = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\varepsilon^2(t,\theta).$$

Ezt $V_N(\theta)$-ba helyettesítve kapjuk a paraméterek ML becslését és a forrászaj szórását:

$$\hat{\theta}_N^{ML} = \arg\min_{\theta}\log(\lambda_N^2(\theta)),$$
$$\lambda_N^2 = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\varepsilon^2(t,\theta)|_{\theta=\hat{\theta}_N^{ML}}.$$

A.4.4. LS modellek

Az LS modellek parametrizálása

$$y_t = \frac{b(q)}{a(q)}u_t + \frac{1}{a(q)}e_t,$$

ahol

$$G(q) = \frac{b(q)}{a(q)}, \quad H(q) = \frac{1}{a(q)}, \quad H^{-1}(q) = a(q).$$

Az ennek megfelelő egylépéses predikció:

$$\hat{y}_{t|t-1} = H^{-1}Gu_t + (1-H^{-1})y_t,$$
$$\hat{y}_{t|t-1} = b(q)u_t + (1-a(q))y_t = \varphi^T(u,y,t)\theta,$$

ahol

$$\varphi^T(u,y,t) = [u_{t-1},\ldots,u_{t-m};-y_{t-1},\ldots,-y_{t-m}],$$
$$\theta^T = [b_1,\ldots,b_m;a_1,\ldots,a_m].$$

A kapott predikciós hiba

$$\varepsilon(t,\theta) = y_t - \varphi^T(u,y,t)\theta,$$

ahol $\varphi(u,y,t)$ a derivált folyamat.

DOI: 10.15477/SZE.MMTDI.2017.007

A.4.5. Pszeudo-lineáris regressziós modell

A pszeudo-lineáris, vagy ARMAX modellek parametrizálása:

$$y_t = \frac{b(q)}{a(q)}u_t + \frac{c(q)}{a(q)}e_t,$$

ahol

$$G(q) = \frac{b(q)}{a(q)}, \quad H(q) = \frac{c(q)}{a(q)}, \quad H^{-1}(q) = \frac{a(q)}{c(q)},$$
$$\deg a(q) = \deg c(q) = n, \quad \deg b(q) = m.$$

Az egylépéses predikciós hiba:

$$\begin{aligned}
\hat{y}_{t|t-1} &= \frac{b(q)}{c(q)}u_t + \left(1 - \frac{a(q)}{c(q}\right)y_t \\
c(q)\hat{y}_{t|t-1} &= b(q)u_t + (c(q) - a(q))y_t \\
\hat{y}_{t|t-1} &= b(q)u_t - a(q)y_t + \overline{c}(q)(y_t - \hat{y}_{t|t-1}) \\
\hat{y}_{t|t-1} &= \varphi'(u,y,\varepsilon,\theta)\theta.
\end{aligned}$$

ahol

$$\begin{aligned}
\varphi^T(u,y,\varepsilon,\theta) &= [u_{t-1},\ldots,u_{t-m};-y_{t-1},\ldots,-y_{t-m},\hat{\varepsilon}_{t-1},\ldots,\hat{\varepsilon}_{t-n}] \\
\theta^T &= [b_1,\ldots,b_m;a_1,\ldots,a_n;c_1,\ldots,c_n].
\end{aligned}$$

Látható, hogy φ tartalmazza a becsült kimeneti zajnak a legközelebbi múltra vonatkozó információját. Ezért hívják a modellt pszeudo-lineáris regressziós modellnek.

A.5. Az aszimptotikus paraméter becslések statisztikai tulajdonságai

Tegyük fel, hogy a tényleges modell, ami az adatokat generálja eleme az $\mathscr{S} \in \mathscr{M}$ modell halmaznak. Ekkor, feltéve, hogy a SISO modellek ML becslésénél tárgyalt feltételek fennállnak, az ML becslés aszimptotikus normalitására vonatkozóan a következőket állíthatjuk:

$$\sqrt{N}(\hat{\theta}_N - \theta^*) \in AsN(0,P_\theta)$$

ahol

$$P_\theta = \lambda_0 \lim_{N\to\infty}\left[\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\psi(t,\theta_0)\psi^T(t,\theta_0)\right]^{-1}$$

DOI: 10.15477/SZE.MMTDI.2017.007

az aszimptotikus eloszlás kovariancia mátrixa. A paraméterek kovarianciájára írható, hogy

$$cov\,\hat{\theta}_N \sim \frac{1}{N} P_\theta.$$

Véges minta esetén P_θ becslésének alakja

$$\hat{P}_N = \hat{\lambda}_N [\frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N} \psi(t, \hat{\theta}_N^{ML}) \psi'(t, \hat{\theta}_N^{ML})]^{-1}$$
$$\hat{\lambda}_N^{ML} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N} \varepsilon^2(t, \hat{\theta}_N).$$

MIMO modellekre pedig:

$$\hat{P}_N = [\frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N} \psi(t, \hat{\theta}_N^{ML}) \hat{\Lambda}_N^{-1} \psi'(t, \hat{\theta}_N^{ML})]^{-1}$$
$$\hat{\Lambda}_N = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N} \varepsilon(t, \hat{\theta}_N^{ML}) \varepsilon'(t, \hat{\theta}_N^{ML}).$$

A.6. A határérték frekvencia tartományi jellemzése

Fontos az eredmény frekvencia tartományi validálása. A határérték frekvencia tartományi tulajdonságainak megértéséhez használjuk ki a veszteségfüggvény idő illetve frekvencia tartománybeli alakjának izomorfizmusát (Fourier transzformáció):

$$\overline{V}(\theta) = \overline{E} \frac{1}{2} \varepsilon^2(t, \theta) = \lim_{N \to \infty} \sum_{t=1}^{N} E \varepsilon^2(t, \theta)$$
$$\overline{V}(\theta) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_\varepsilon(\omega, \theta) d\omega$$

ahol $\Phi_\varepsilon(\omega, \theta)$ a predikciós hiba spektrális sűrűségfüggvénye. Tegyük fel, hogy

- az adatokat generáló rendszer alakja:

  $$y_t = G_0(q) u_t + \varepsilon_t,$$

  és létezik $\Phi_\varepsilon(\omega)$;

- A becsült modell alakja:

  $$y_t = G(\theta, q) u_t + H(\theta, q) e_t,$$

  ahol $e_t \sim (0, \lambda_0)$ fehér zaj.

DOI: 10.15477/SZE.MMTDI.2017.007

A predikciós hibát megadó formula

$$\begin{aligned}\varepsilon(t,\theta) &= H^{-1}(q,\theta)[y_t - G(q,\theta)u_t] \\ &= H^{-1}(q,\theta)\left[(G_0(q) - G(q,\theta))u_t + \varepsilon_t\right].\end{aligned}$$

Ennek Fourier tartományban

$$\Phi_\varepsilon(\omega,\theta) = \frac{|\tilde{G}(e^{i\omega},\theta)|^2\Phi_u(\omega) + \Phi_\varepsilon(\omega)}{|H(e^{i\omega},\theta)|^2}$$

felel meg, ahol feltettük, hogy u_t, ε_t független és korrelálatlan. Ennek felhasználásával a veszteségfüggvény határértéke

$$\overline{V}(\theta) = \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\left|G_0(e^{i\omega}) - G(e^{i\omega},\theta)\right|^2\Phi_u(\omega) + \Phi_\varepsilon(\omega)\right]\frac{1}{|H(e^{i\omega},\theta)|^2}d\omega.$$

Jelölje $\mathscr{D}_c$ a becsült θ^* határértékek halmazát, azaz

$$\theta^* \in \mathscr{D}_c, \text{ if } \theta^* \text{ minimize } \overline{V}(\theta).$$

Vizsgálandó az alábbi feladat:

$$\mathscr{D}_c = \arg\min_\theta \overline{V}(\theta)$$

A továbbiakban az egyes modell parametrizálások hatását vizsgáljuk a határérték modellek frekvencia tartományi viselkedésére.

A.6.1. Rögzített zaj modell

Legyen $H(q,\theta) = H^*(q)$ minden θ esetén.

$$\mathscr{D}_c = \arg\min_\theta \int_{-\pi}^{\pi}\left|G_0(e^{i\omega}) - G(e^{i\omega},\theta)\right|^2 Q^*(\omega)d\omega,$$

ahol

$$Q^*(\omega) = \frac{\Phi_u(\omega)}{|H^*(e^{i\omega})|^2}.$$

A határérték modell

$$G^*(e^{i\omega}) = G(e^{i\omega},\theta^*)$$

a $G_0(e^{i\omega})$ legjobb MS becslése $Q^*(\omega)$ frekvencia súlyozás mellett, ahol $Q^*(\omega)$ jelöli az egyes ω frekvencián a jel zaj arányt.

DOI: 10.15477/SZE.MMTDI.2017.007

A.6.2. Függetlenül parametrizált zaj modell

Legyen $\theta^* = [\rho^{*\prime}\ \eta^{*\prime}]'$, ahol

$$\rho^* = \arg\min_{\rho} \int_{-\pi}^{\pi} \left|G_0(e^{i\omega}) - G(e^{i\omega},\rho)\right|^2 Q(\omega,\eta^*)d\omega,$$

és

$$\begin{aligned} Q(\omega,\eta) &= \frac{\Phi_u(\omega)}{|H(e^{i\omega},\eta)|^2} \\ \eta^* &= \arg\min_{\eta} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\Phi_{ER}(\omega,\rho^*)}{|H(e^{i\omega},\eta)|^2} d\omega \\ \Phi_{ER}(\omega,\rho) &= \left|G_0(e^{i\omega}) - G(e^{i\omega},\rho)\right|^2 \Phi_u(\omega) + \Phi_\varepsilon(\omega) \end{aligned}$$

Tegyük fel, hogy Φ_{ER} faktorizálható, mint

$$\Phi_{ER}(\omega,\rho^*) = \lambda^* \left|N(e^{i\omega},\rho^*)\right|^2.$$

Ekkor

$$\eta^* = \arg\min_{\eta} \int_{-\pi}^{\pi} \left|\frac{1}{N(e^{i\omega},\rho^*)} - \frac{1}{H(e^{i\omega},\eta)}\right|^2 \Phi_{ER}(\omega,\rho^*)d\omega \tag{A.37}$$

Az inverz zaj modellt a spektrál faktor hibájának inverzére kvadratikus normában illesztjük.

A.6.3. Általános esetre vonatkozó megjegyzések

A θ^* becslés egy kompromisszum az alábbiak között:

i) $G(e^{i\omega},\theta)$ frekvencia tartományban, kvadratikus normában való illesztése $G_0(e^{i\omega})$-re (ún. $\mathscr{H}_2$-norma), $Q(\omega,\theta^*)$ súlyozással, ahol :

$$Q(\omega,\theta^*) = \frac{\Phi_u(\omega)}{|H(e^{i\omega},\theta^*)|^2}$$

a jel-zaj arány;

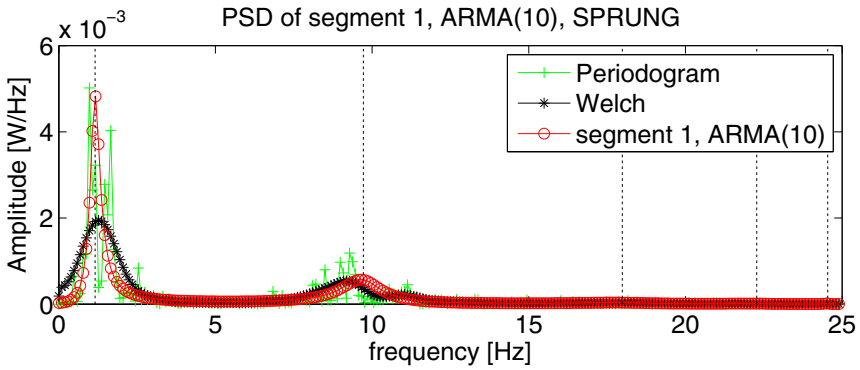
ii) a zaj modell inverz spektrál faktorának illesztése a A.37 formula szerint, $\Phi_{ER}(\omega)$ kvadratikus normájában;

iii) az adatok előszűrése egyenértékű a fix zaj modell alkalmazásával.

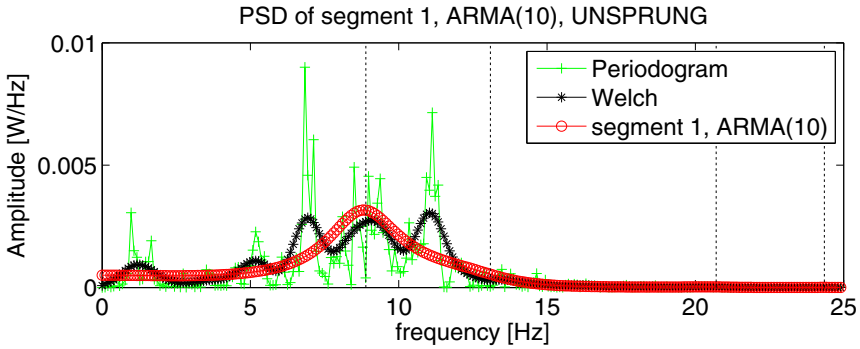
DOI: 10.15477/SZE.MMTDI.2017.007

A.7. Mérések feldolgozása és kiértékelése

A.7.1. Az 1. szegmens eredményei

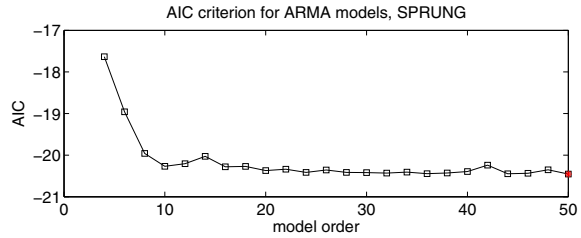


(a) Rugózott tömeg

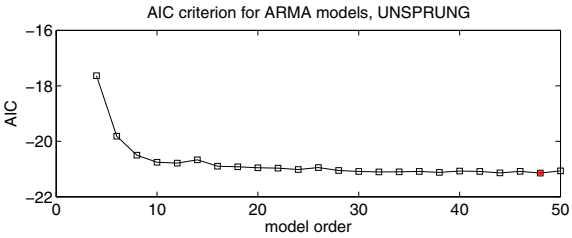


(b) Rugózatlan tömeg

A.1. ábra. Az ARMA(10) modell teljesítményspektruma. Adatok: 1. szegmens gyorsulása. Függőleges pontozott fekete vonalak mutatják az enyhén csillapított mód frekvenciáit.



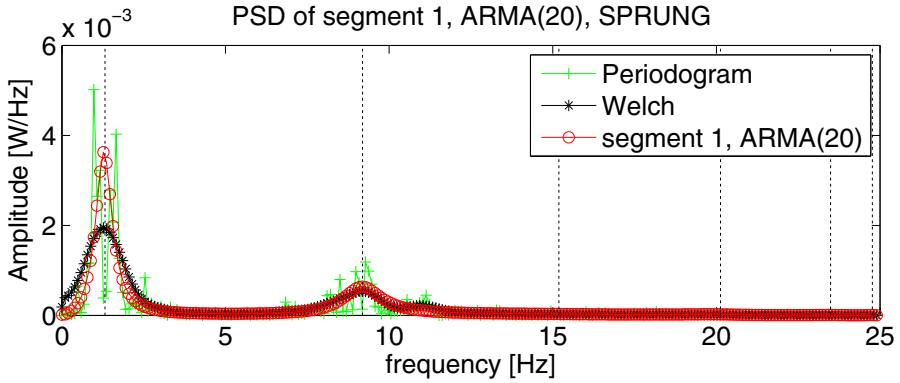
(a) Rugózott tömeg



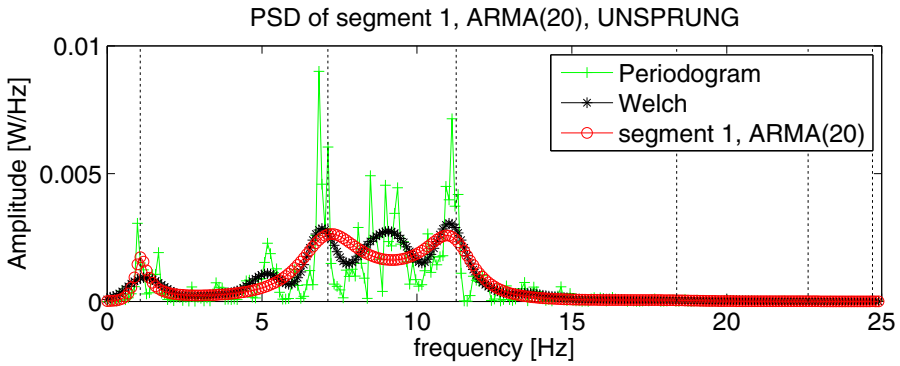
(b) Rugózatlan tömeg

A.2. ábra. Akaike információs kritériuma az ARMA modellek rendjének függvényében.

DOI: 10.15477/SZE.MMTDI.2017.007

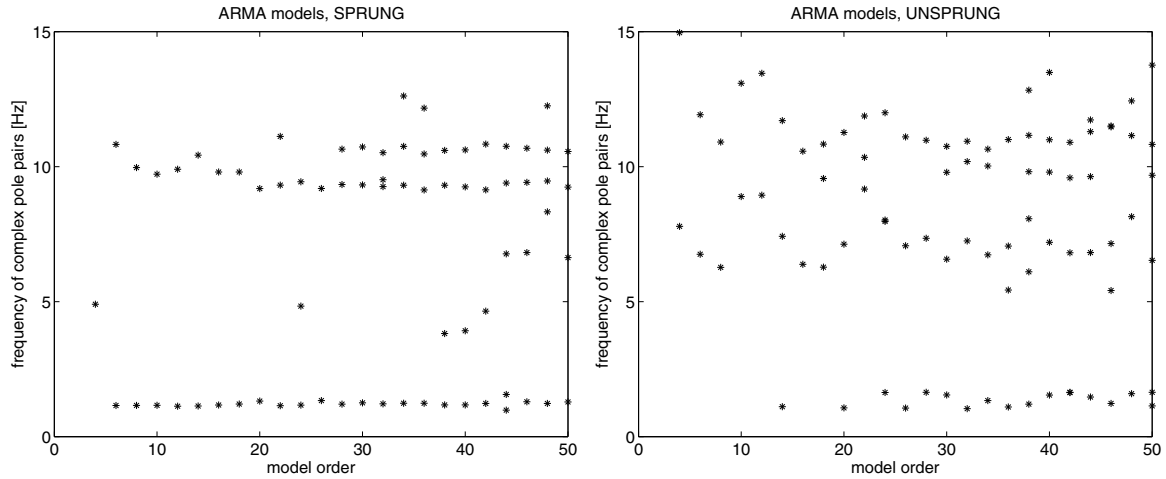


(a) Rugózott tömeg



(b) Rugózatlan tömeg

A.3. ábra. Az ARMA(20) modell teljesítményspektruma. Adatok: 1. szegmens gyorsulása. Függőleges pontozott fekete vonalak mutatják az enyhén csillapított mód frekvenciáit.



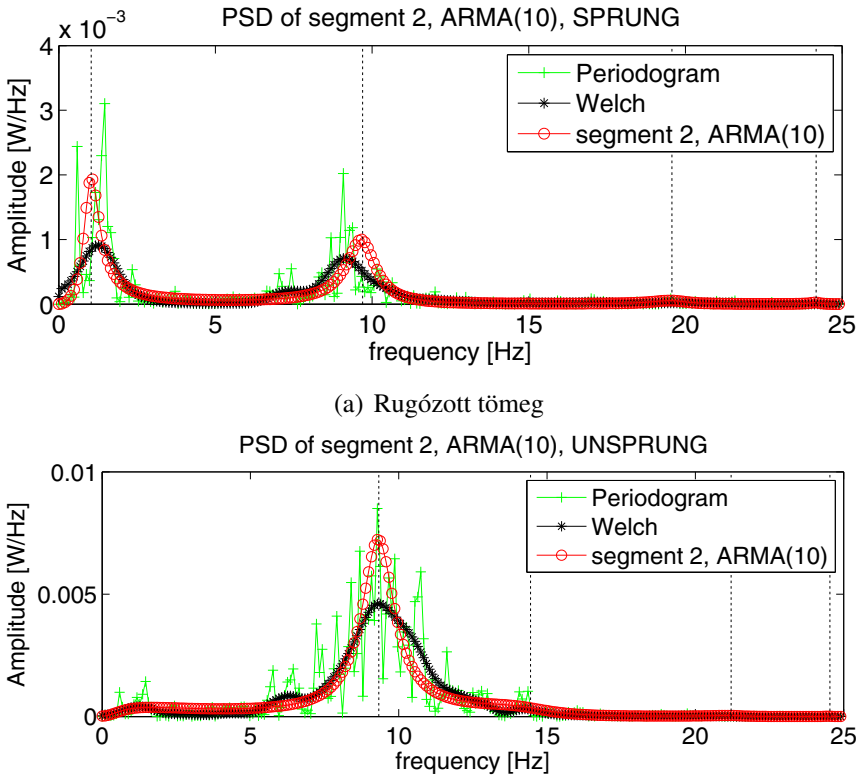
(a) Rugózott tömeg

(b) Rugózatlan tömeg

A.4. ábra. Az azonosított rezonancia módok frekvenciái az egyes ARMA modellekre.

DOI: 10.15477/SZE.MMTDI.2017.007

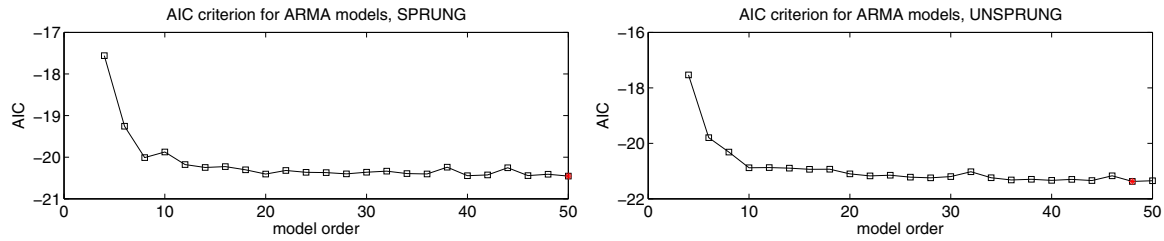
A.7.2. A 2. szegmens eredményei



(a) Rugózott tömeg

(b) Rugózatlan tömeg

A.5. ábra. Az ARMA(10) modell teljesítményspektruma. Adatok: 2. szegmens gyorsulása. Függőleges pontozott fekete vonalak mutatják az enyhén csillapított mód frekvenciáit.

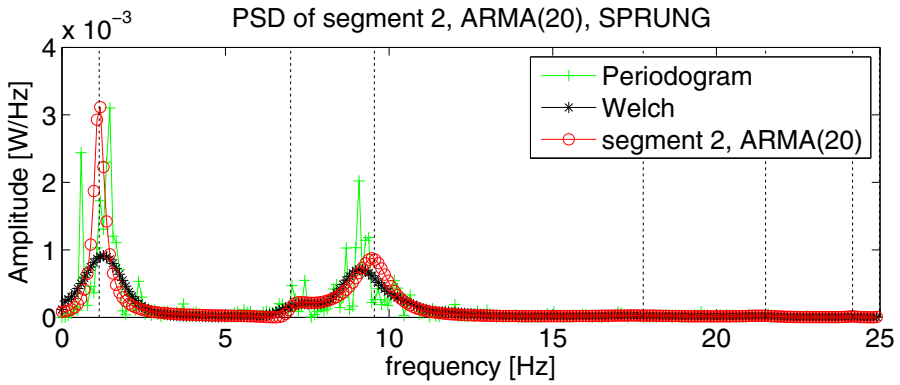


(a) Rugózott tömeg

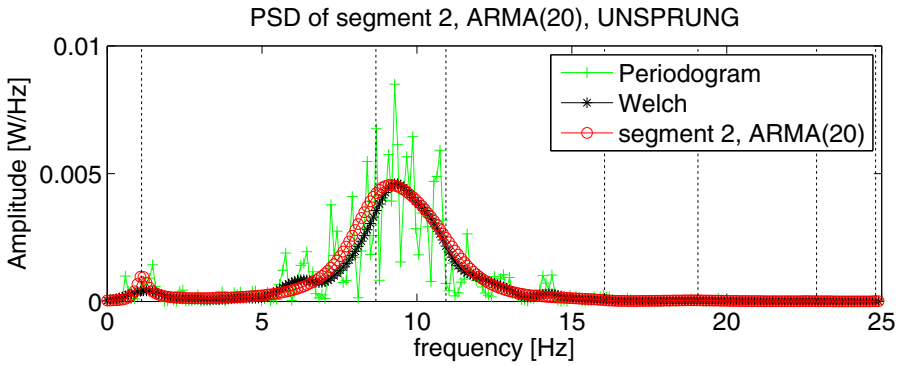
(b) Rugózatlan tömeg

A.6. ábra. Akaike információs kritériuma az ARMA modellek rendjének függvényében.

DOI: 10.15477/SZE.MMTDI.2017.007

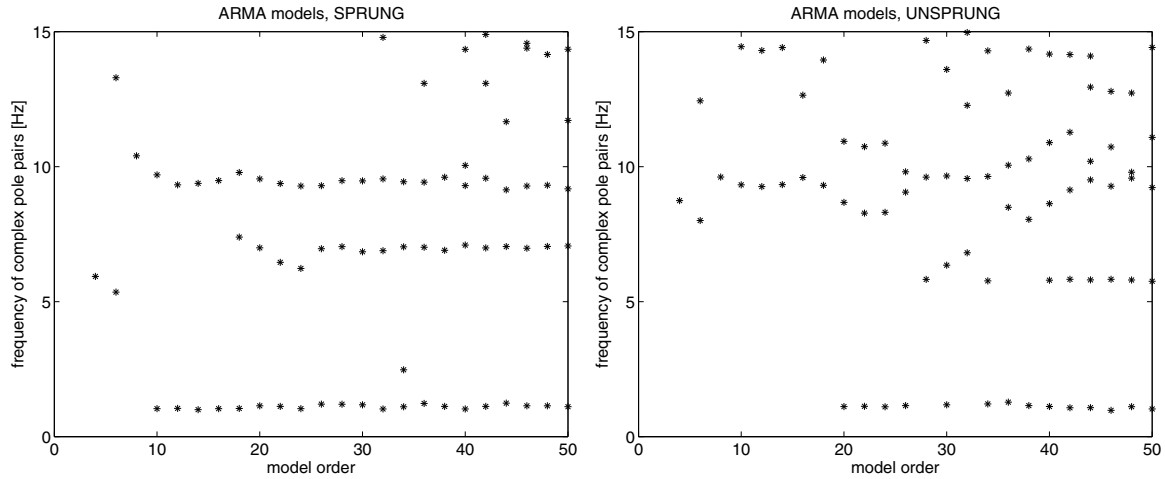


(a) Rugózott tömeg



(b) Rugózatlan tömeg

A.7. ábra. Az ARMA(20) modell teljesítményspektruma. Adatok: 2. szegmens gyorsulása. Függőleges pontozott fekete vonalak mutatják az enyhén csillapított mód frekvenciáit.



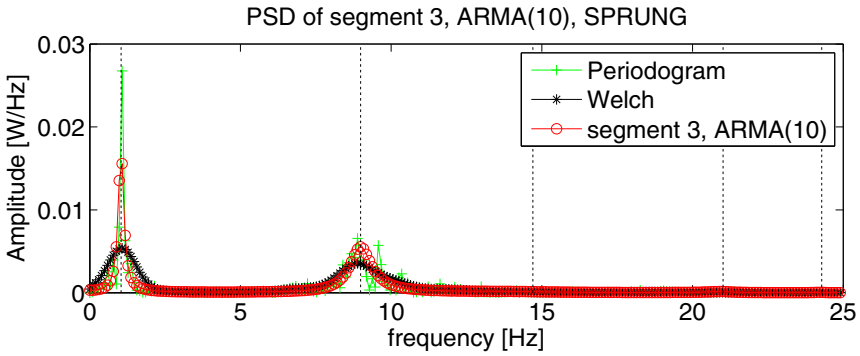
(a) Rugózott tömeg

(b) Rugózatlan tömeg

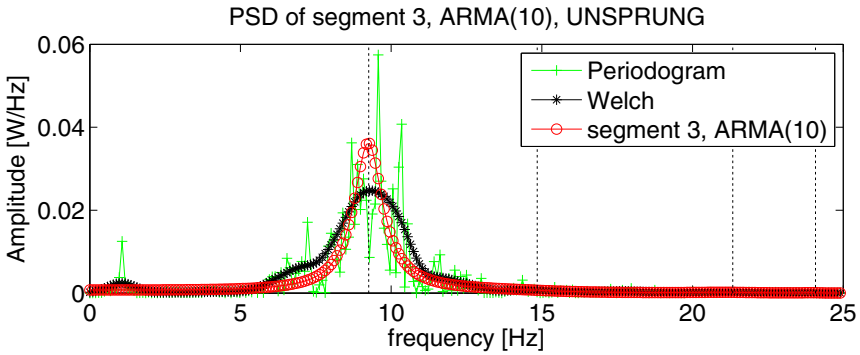
A.8. ábra. Az azonosított rezonancia módok frekvenciái az egyes ARMA modellekre.

DOI: 10.15477/SZE.MMTDI.2017.007

A.7.3. A 3. szegmens eredményei

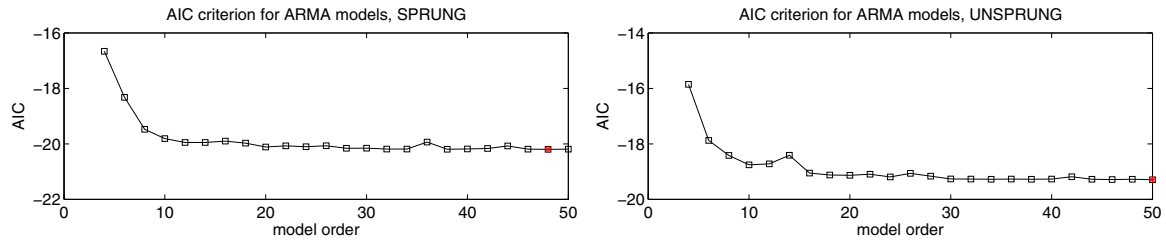


(a) Rugózott tömeg



(b) Rugózatlan tömeg

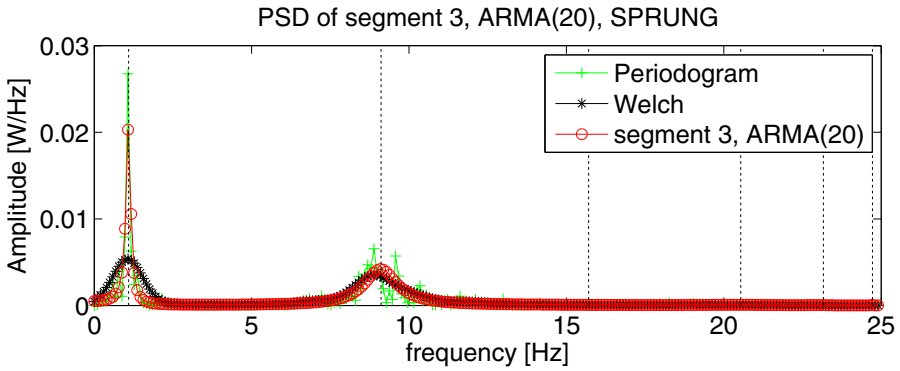
A.9. ábra. Az ARMA(10) modell teljesítményspektruma. Adatok: 3. szegmens gyorsulása. Függőleges pontozott fekete vonalak mutatják az enyhén csillapított mód frekvenciáit.



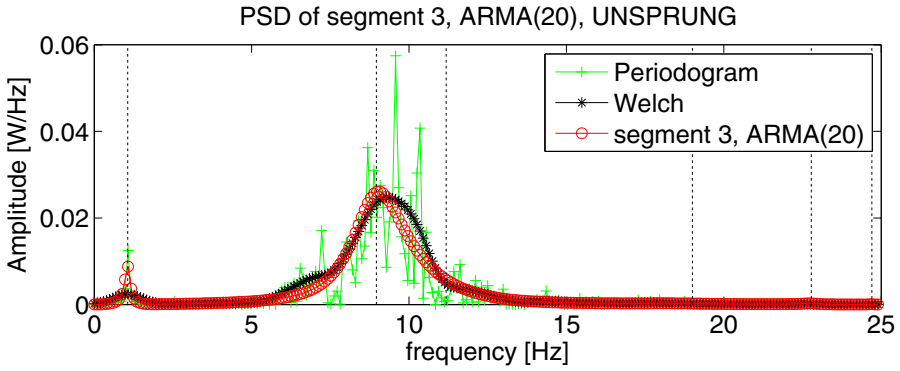
(a) Rugózott tömeg (b) Rugózatlan tömeg

A.10. ábra. Akaike információs kritériuma az ARMA modellek rendjének függvényében.

DOI: 10.15477/SZE.MMTDI.2017.007

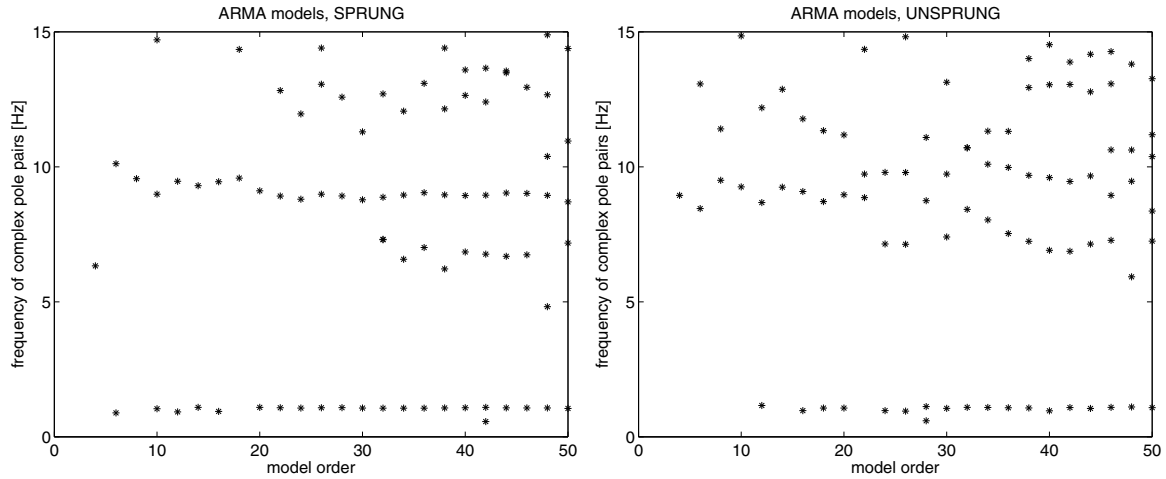


(a) Rugózott tömeg



(b) Rugózatlan tömeg

A.11. ábra. Az ARMA(20) modell teljesítményspektruma. Adatok: 3. szegmens gyorsulása. Függőleges pontozott fekete vonalak mutatják az enyhén csillapított mód frekvenciáit.



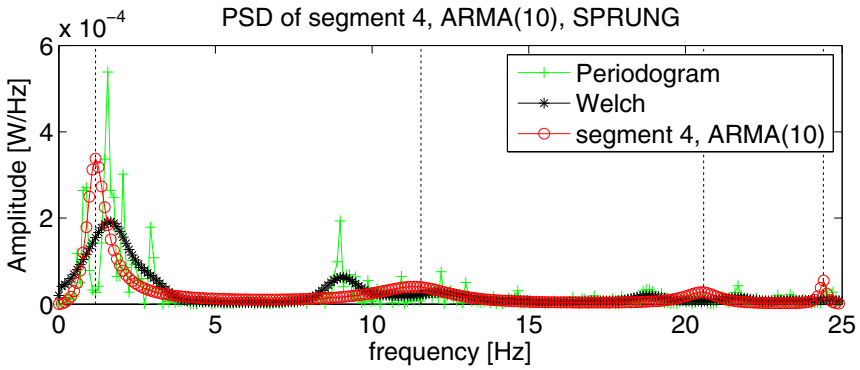
(a) Rugózott tömeg

(b) Rugózatlan tömeg

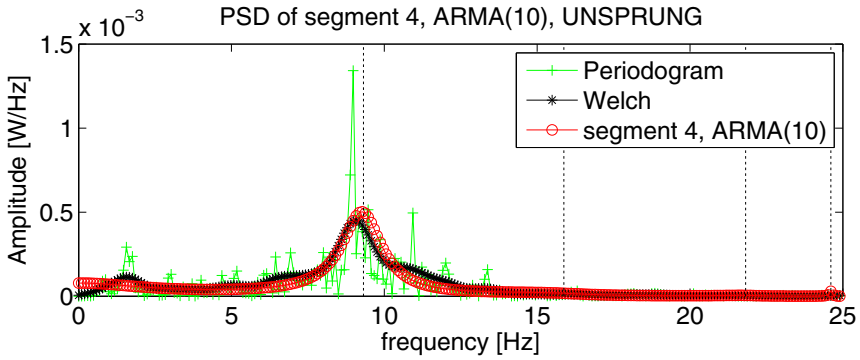
A.12. ábra. Az azonosított rezonancia módok frekvenciái az egyes ARMA modellekre.

DOI: 10.15477/SZE.MMTDI.2017.007

A.7.4. A 4. szegmens eredményei

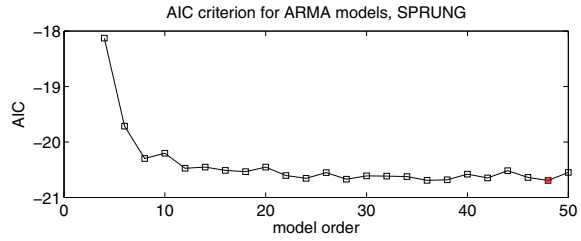


(a) Rugózott tömeg

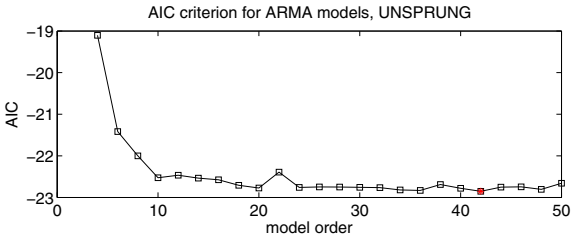


(b) Rugózatlan tömeg

A.13. ábra. Az ARMA(10) modell teljesítményspektruma. Adatok: 4. szegmens gyorsulása. Függőleges pontozott fekete vonalak mutatják az enyhén csillapított mód frekvenciáit.



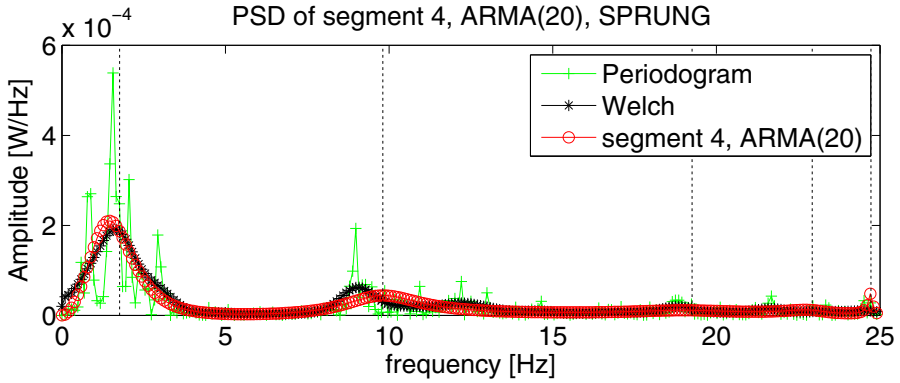
(a) Rugózott tömeg



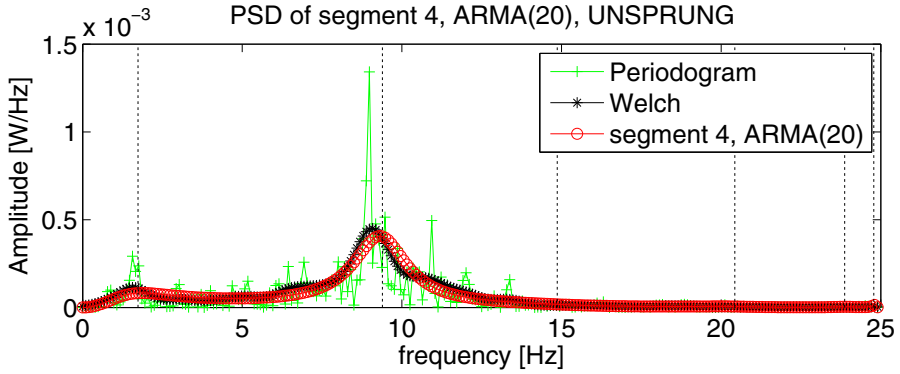
(b) Rugózatlan tömeg

A.14. ábra. Akaike információs kritériuma az ARMA modellek rendjének függvényében.

DOI: 10.15477/SZE.MMTDI.2017.007

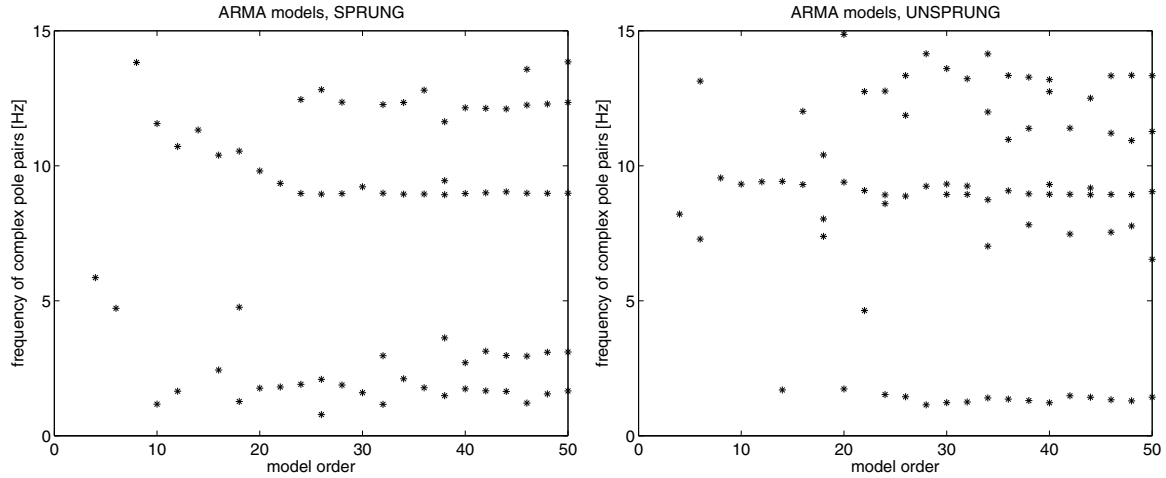


(a) Rugózott tömeg



(b) Rugózatlan tömeg

A.15. ábra. Az ARMA(20) modell teljesítményspektruma. Adatok: 4. szegmens gyorsulása. Függőleges pontozott fekete vonalak mutatják az enyhén csillapított mód frekvenciáit.

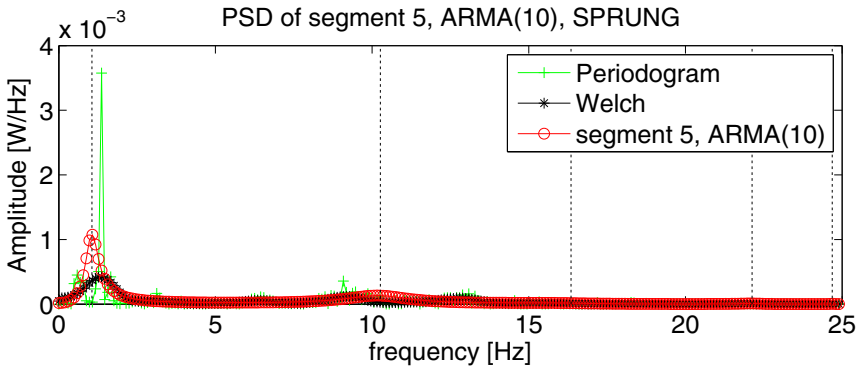


(a) Rugózott tömeg (b) Rugózatlan tömeg

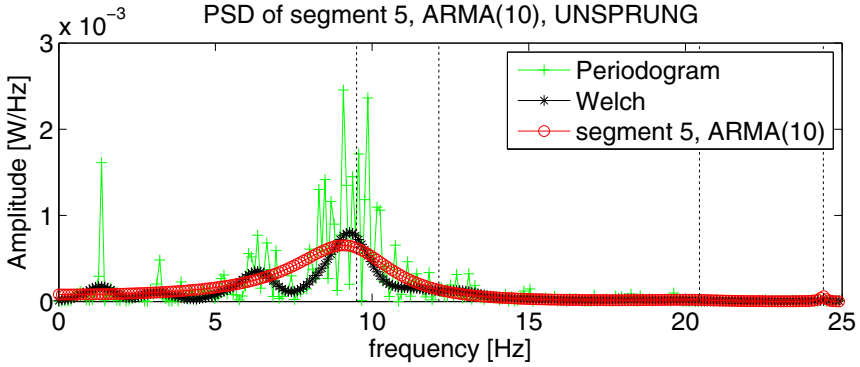
A.16. ábra. Az azonosított rezonancia módok frekvenciái az egyes ARMA modellekre.

DOI: 10.15477/SZE.MMTDI.2017.007

A.7.5. Az 5. szegmens eredményei

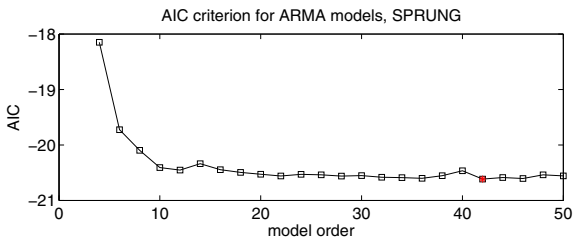


(a) Rugózott tömeg

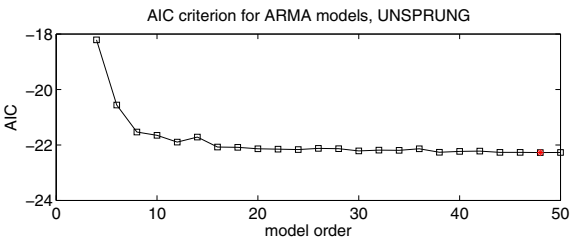


(b) Rugózatlan tömeg

A.17. ábra. Az ARMA(10) modell teljesítményspektruma. Adatok: 5. szegmens gyorsulása. Függőleges pontozott fekete vonalak mutatják az enyhén csillapított mód frekvenciáit.



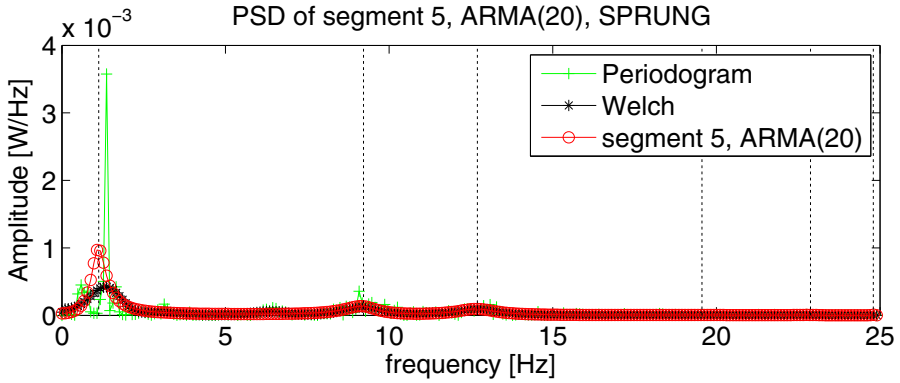
(a) Rugózott tömeg



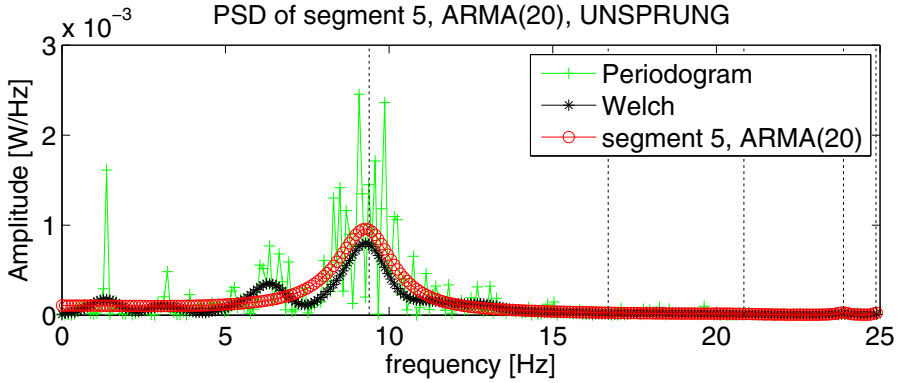
(b) Rugózatlan tömeg

A.18. ábra. Akaike információs kritériuma az ARMA modellek rendjének függvényében.

DOI: 10.15477/SZE.MMTDI.2017.007

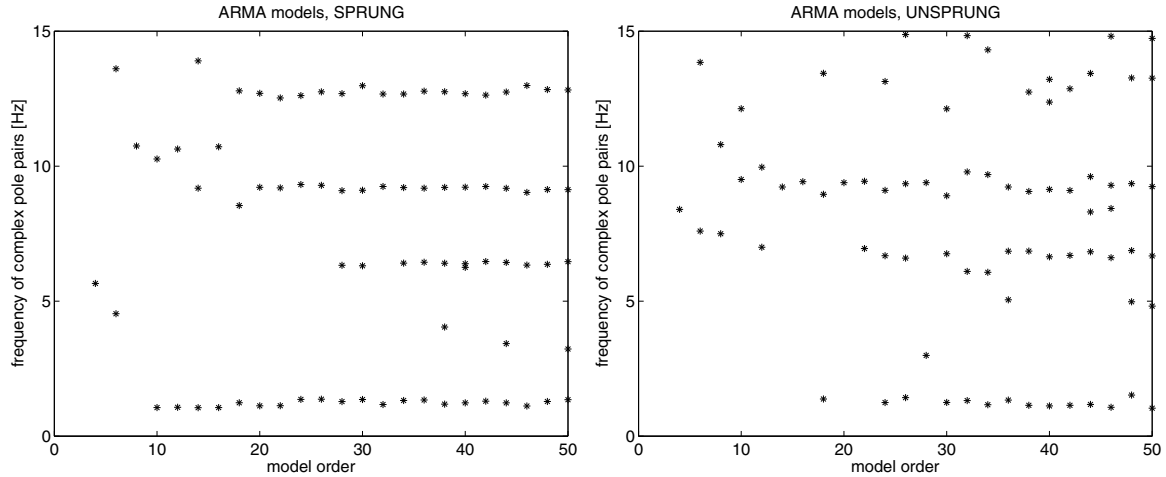


(a) Rugózott tömeg



(b) Rugózatlan tömeg

A.19. ábra. Az ARMA(20) modell teljesítményspektruma. Adatok: 5. szegmens gyorsulása. Függőleges pontozott fekete vonalak mutatják az enyhén csillapított mód frekvenciáit.



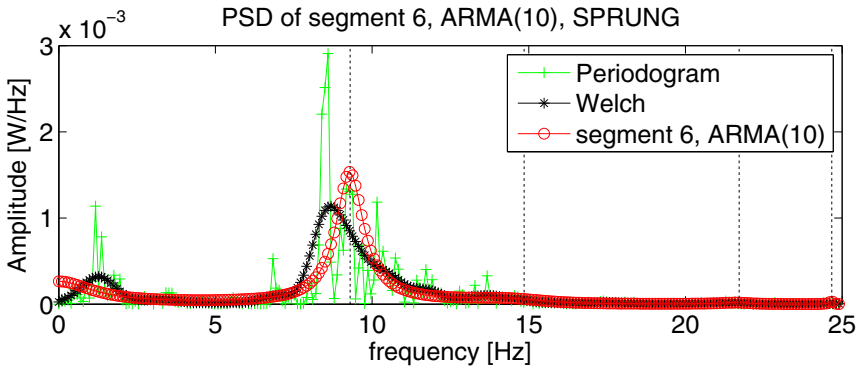
(a) Rugózott tömeg

(b) Rugózatlan tömeg

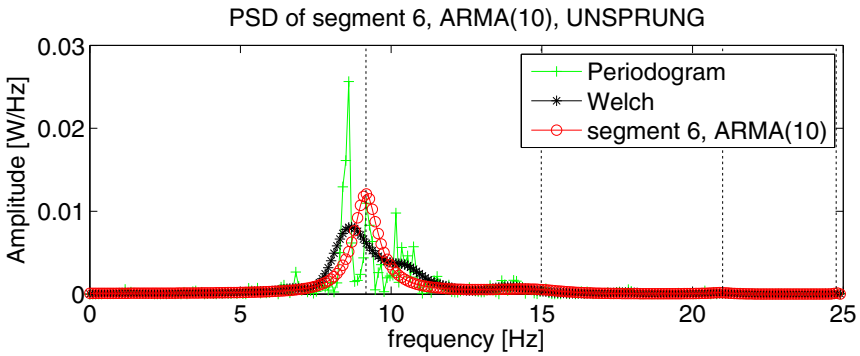
A.20. ábra. Az azonosított rezonancia módok frekvenciái az egyes ARMA modellekre.

DOI: 10.15477/SZE.MMTDI.2017.007

A.7.6. A 6. szegmens eredményei

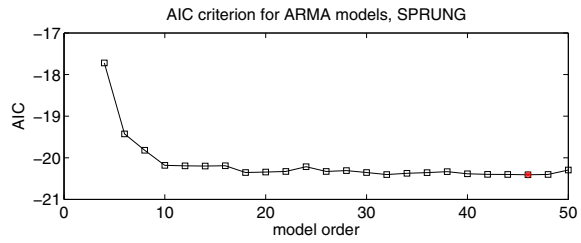


(a) Rugózott tömeg

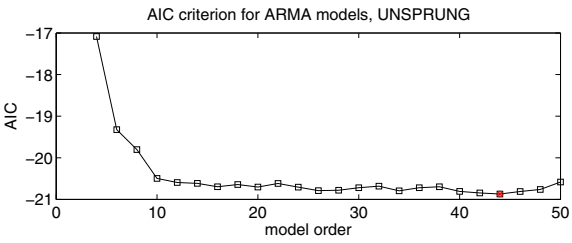


(b) Rugózatlan tömeg

A.21. ábra. Az ARMA(10) modell teljesítményspektruma. Adatok: 6. szegmens gyorsulása. Függőleges pontozott fekete vonalak mutatják az enyhén csillapított mód frekvenciáit.



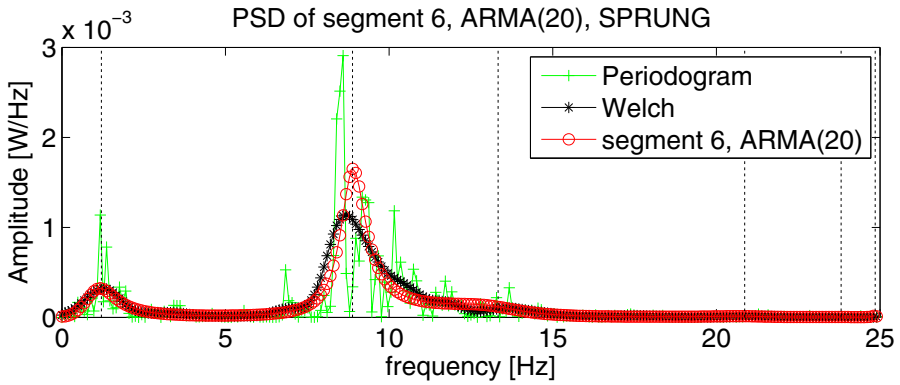
(a) Rugózott tömeg



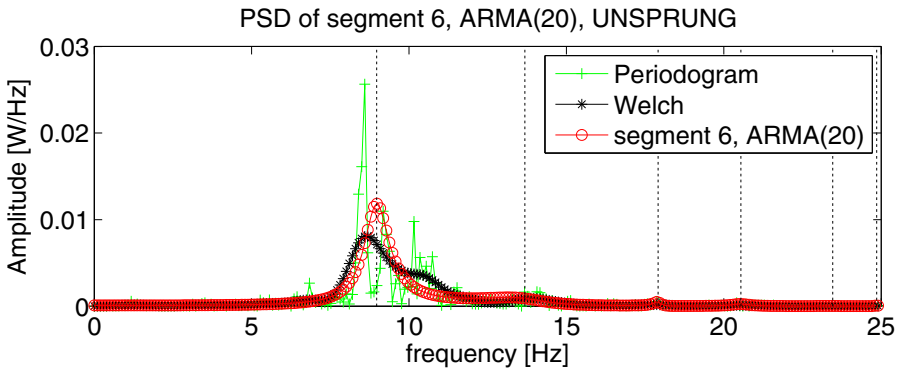
(b) Rugózatlan tömeg

A.22. ábra. Akaike információs kritériuma az ARMA modellek rendjének függvényében.

DOI: 10.15477/SZE.MMTDI.2017.007

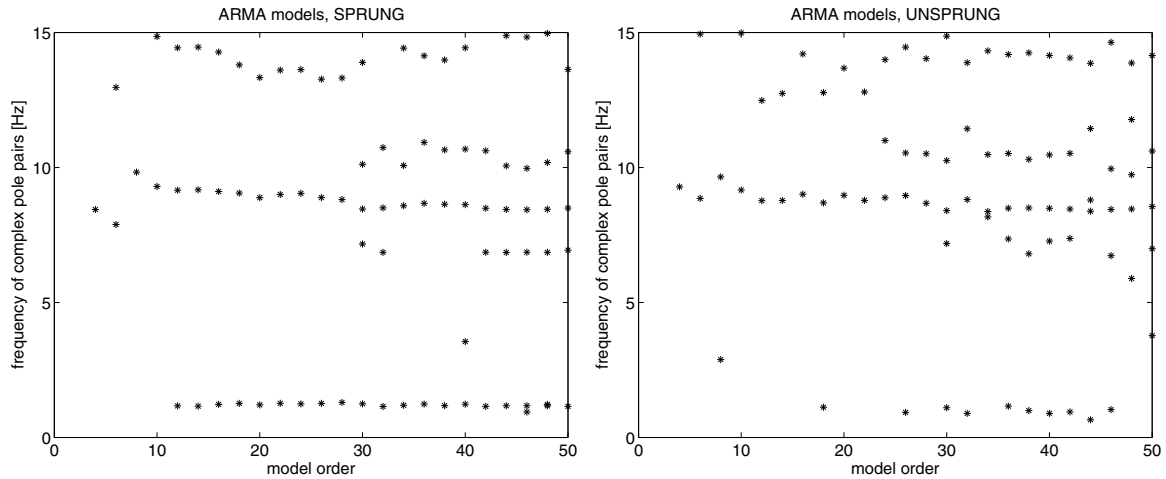


(a) Rugózott tömeg



(b) Rugózatlan tömeg

A.23. ábra. Az ARMA(20) modell teljesítményspektruma. Adatok: 6. szegmens gyorsulása. Függőleges pontozott fekete vonalak mutatják az enyhén csillapított mód frekvenciáit.



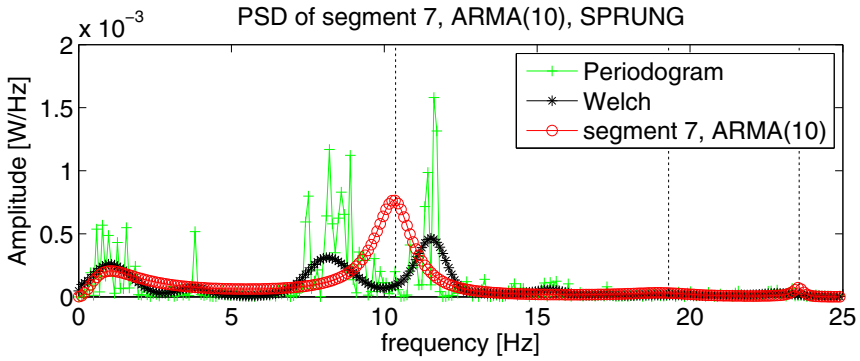
(a) Rugózott tömeg

(b) Rugózatlan tömeg

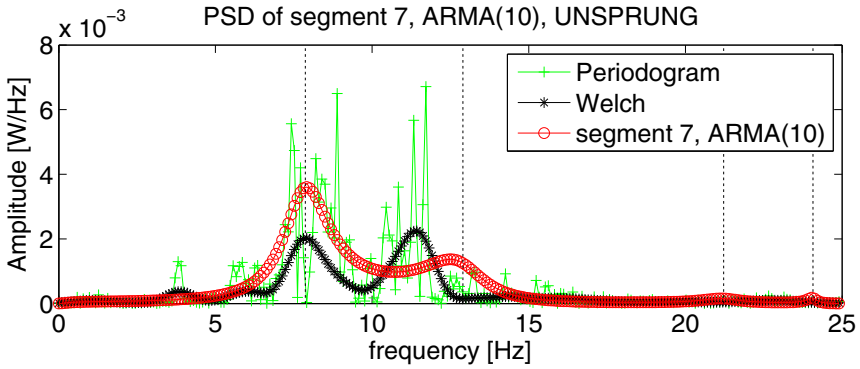
A.24. ábra. Az azonosított rezonancia módok frekvenciái az egyes ARMA modellekre.

DOI: 10.15477/SZE.MMTDI.2017.007

A.7.7. A 7. szegmens eredményei

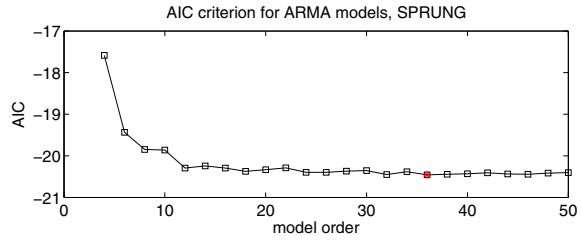


(a) Rugózott tömeg

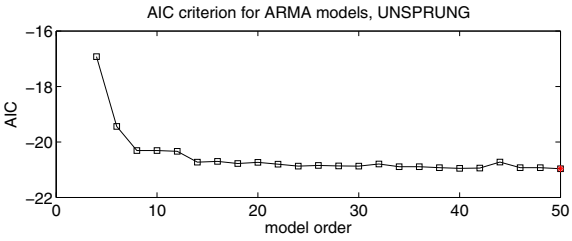


(b) Rugózatlan tömeg

A.25. ábra. Az ARMA(10) modell teljesítményspektruma. Adatok: 7. szegmens gyorsulása. Függőleges pontozott fekete vonalak mutatják az enyhén csillapított mód frekvenciáit.



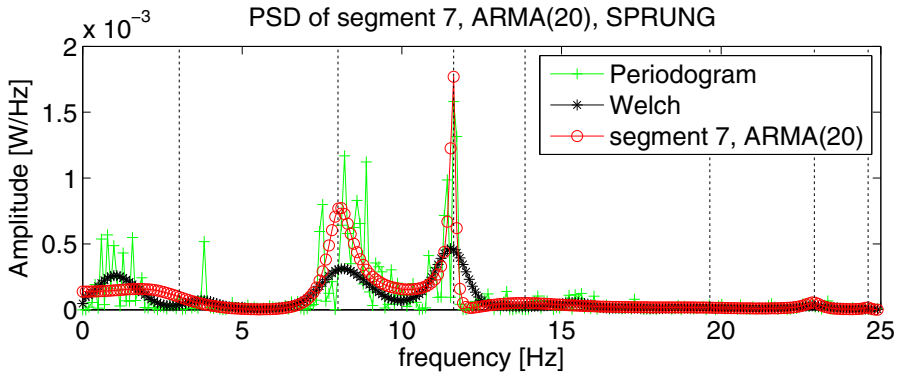
(a) Rugózott tömeg



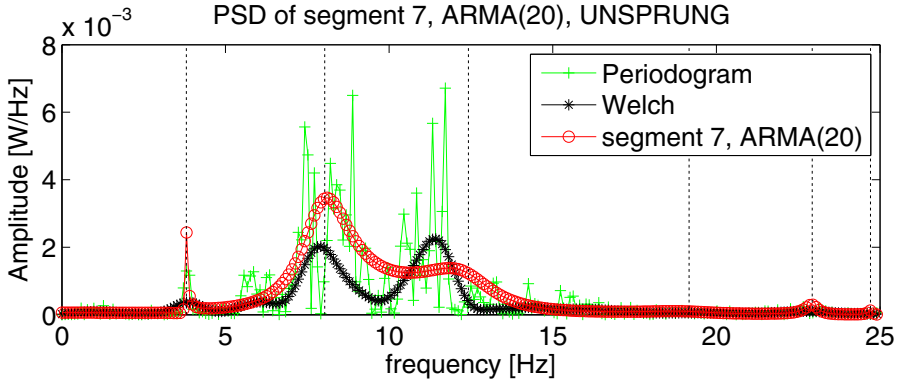
(b) Rugózatlan tömeg

A.26. ábra. Akaike információs kritériuma az ARMA modellek rendjének függvényében.

DOI: 10.15477/SZE.MMTDI.2017.007

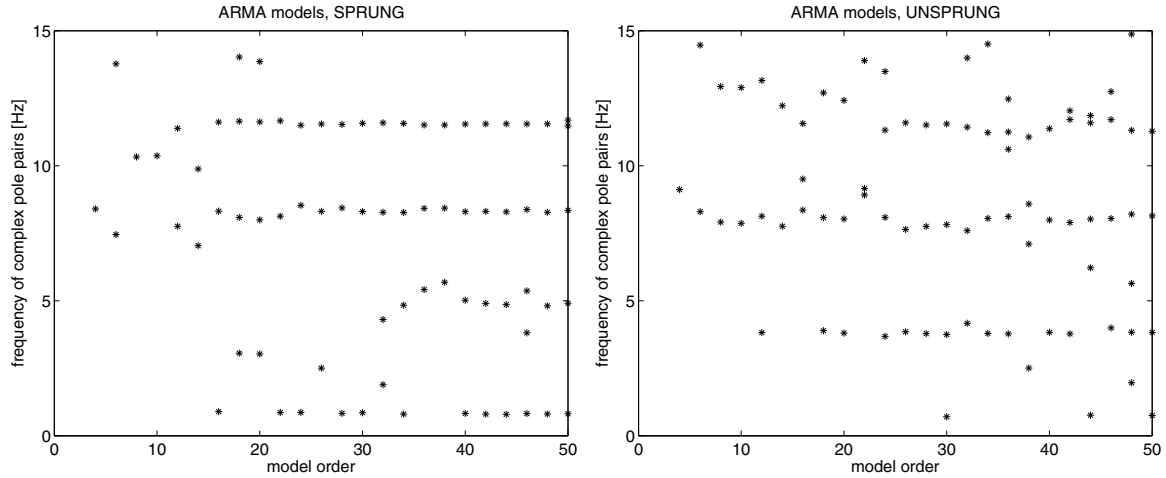


(a) Rugózott tömeg



(b) Rugózatlan tömeg

A.27. ábra. Az ARMA(20) modell teljesítményspektruma. Adatok: 7. szegmens gyorsulása. Függőleges pontozott fekete vonalak mutatják az enyhén csillapított mód frekvenciáit.



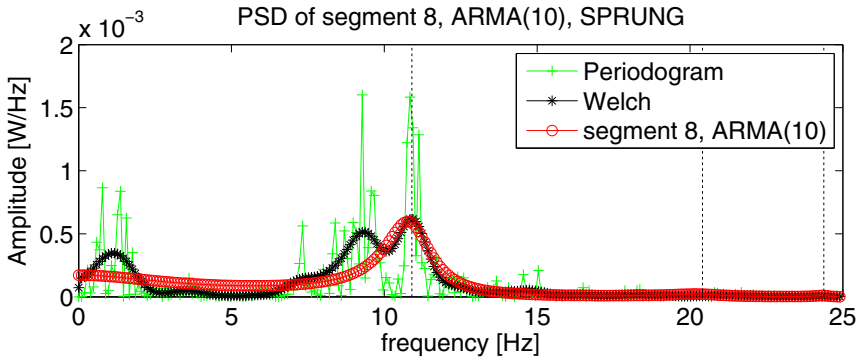
(a) Rugózott tömeg

(b) Rugózatlan tömeg

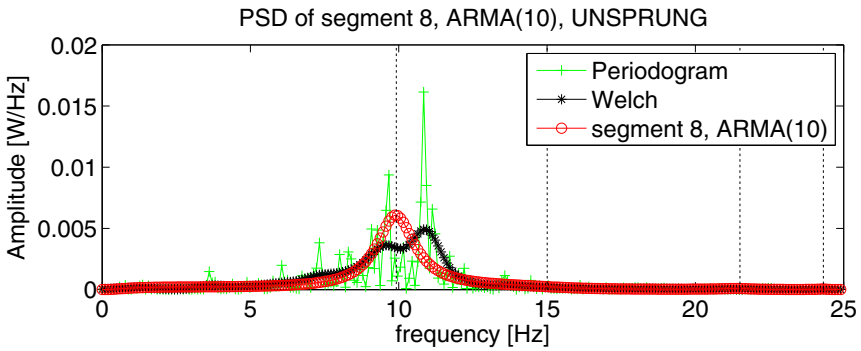
A.28. ábra. Az azonosított rezonancia módok frekvenciái az egyes ARMA modellekre.

DOI: 10.15477/SZE.MMTDI.2017.007

A.7.8. A 8. szegmens eredményei

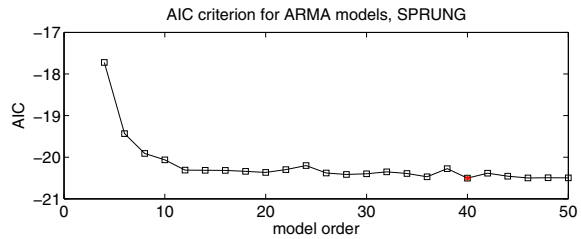


(a) Rugózott tömeg

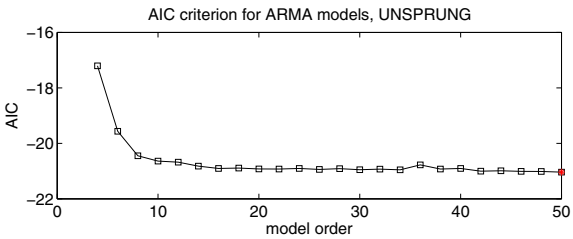


(b) Rugózatlan tömeg

A.29. ábra. Az ARMA(10) modell teljesítményspektruma. Adatok: 8. szegmens gyorsulása. Függőleges pontozott fekete vonalak mutatják az enyhén csillapított mód frekvenciáit.



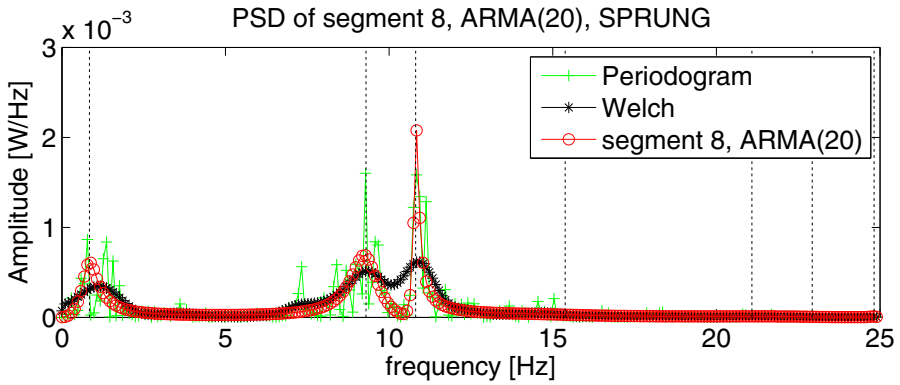
(a) Rugózott tömeg



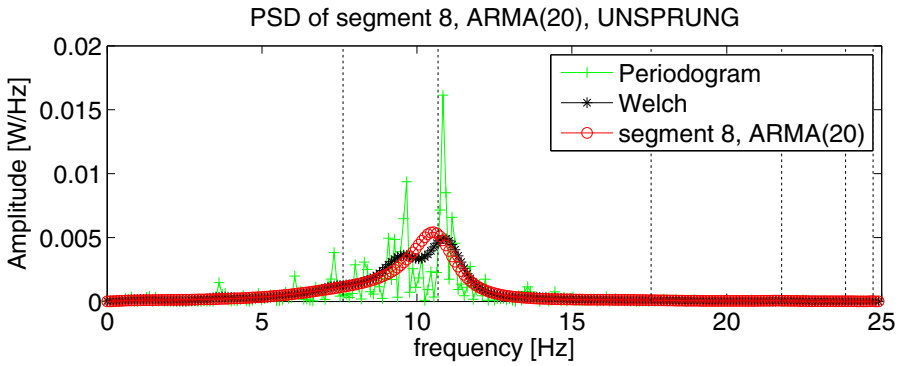
(b) Rugózatlan tömeg

A.30. ábra. Akaike információs kritériuma az ARMA modellek rendjének függvényében.

DOI: 10.15477/SZE.MMTDI.2017.007

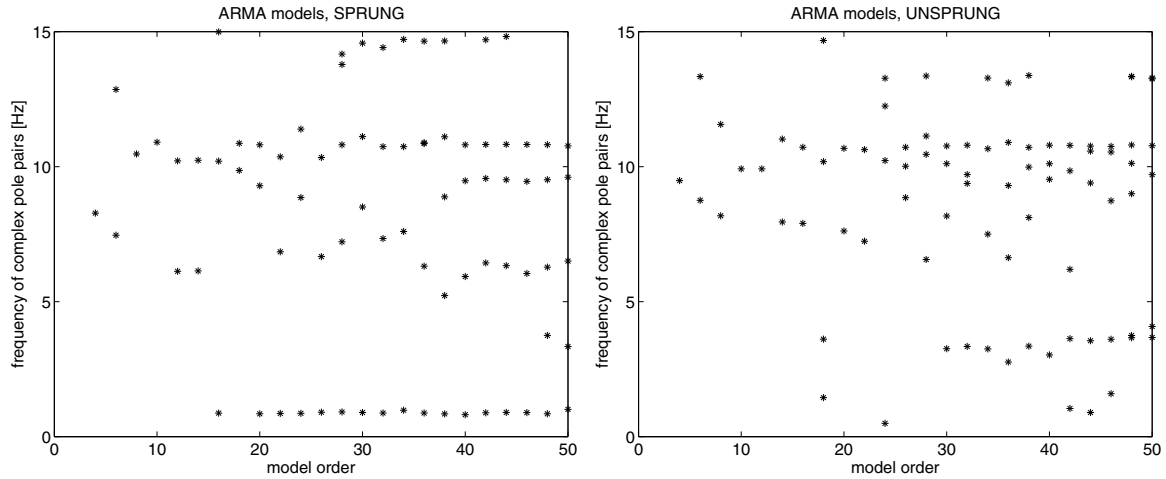


(a) Rugózott tömeg



(b) Rugózatlan tömeg

A.31. ábra. Az ARMA(20) modell teljesítményspektruma. Adatok: 8. szegmens gyorsulása. Függőleges pontozott fekete vonalak mutatják az enyhén csillapított mód frekvenciáit.



(a) Rugózott tömeg

(b) Rugózatlan tömeg

A.32. ábra. Az azonosított rezonancia módok frekvenciái az egyes ARMA modellekre.

DOI: 10.15477/SZE.MMTDI.2017.007

Irodalomjegyzék

[1] Bokor J , Tanyi M , Terdik G *Forward And Backward Markovian State-space Models of 2nd Order Process*, Computers and Mathematics with Applications 19:(1) pp. 21-29. (1990)

[2] József Bokor , Péter Gáspár , Gyula Pap *Analysis of multiple model method for change detection of AR processes*, Computers and Mathematics with Applications 19:(1) pp. 115-121, 1990.

[3] Bokor J, Keviczky L Parametrizations of Linear Stochastic-Systems, *Lecture Notes in Control and Information Sciences* 161. Topics in Stochastic Systems: Modelling, Estimation and Adaptive Control, pp. 47-65, 1991.

[4] J. Bokor, L. Palkovics, P. Michelberger and P. Várlaki, *Design of active wheel suspension system using RLQR and $\mathscr{H}_\infty$ control*, Vehicle System Dynamics, 1993.

[5] J. Bokor, *Approximate Identification for Robust Control*, Annual Review in Control, vol. 22, pp. 187–198, 1998.

[6] Bokor J , Keresztes A Identification of a multivariable linear model for road vehicle dynamics form test data, In: Bokor J, Nándori E, Várlaki P (szerk.), Studies in vehicle engineering and transportation science: a festschrift in honor of professor Pál Michelberger on occasion of his 70th birthday. Budapest: Hungarian Academy of Sciences - Budapest University of Technology and Economics, pp. 127-143, 2000.

[7] Bokor J, Szabó Z Frequency-domain Identification in $\mathscr{H}_2$. In: Heuberger PSC , van Den Hof PMJ , Wahlberg B (szerk.), Modelling And Identification With Rational Orthogonal Basis Functions. London: Springer, pp. 213-233, 2005.

[8] Bokor J, Szabó Z: Frequency-domain Identification in $\mathscr{H}_\infty$, In: Heuberger PSC , van Den Hof PMJ , Wahlberg B (szerk.), Modelling And Identification With Rational Orthogonal Basis Functions. London: Springer, pp. 235-268, 2005.

[9] Gáspár P, Szabó Z, Bokor J Active suspension in integrated vehicle control. In: Janusz Kleban (szerk.), Switched Systems. Vienna: InTech Education and Publishing, pp. 83-104, 2009

DOI: 10.15477/SZE.MMTDI.2017.007

[10] Caines, P.E. Prediction error identification methods for stationary stochastic processes. *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 21, pp. 500–505, 1976.

[11] Caines, P.E. On the asymptotic normality of instrumental variable and least squares estimators. *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 21, pp. 598–600, 1976.

[12] Chen, J. and G. Gu *Control-Oriented System Identification. An $\mathscr{H}_\infty$ Approach*. John Wiley & Sons, New York, 2000.

[13] I.R. Ellis, An introduction to the dynamic properties of vehicle suspensions. Proc. Inst. Mech. Eng., vol. 65, no.2, 1964.

[14] W.A. Gardner, *Statistical spectral analysis. A nonprobabilistic theory*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1986.

[15] Gáspár P, Szászi I, Bokor J Active suspension design using linear parameter varying control, International Journal of Vehicle Autonomous Systems 1:(2) pp. 206-221, 2003.

[16] Gáspár P, Szabó Z, Bokor J Parameter identification of a suspension system and road disturbance estimation. International Journal of Vehicle Systems Modelling and Testing 2:(2) pp. 128-137, 2007.

[17] G. L. Gissinger, Y. Chamaillard, and T. Stemmelen *Modeling a motor vehicle and its braking system*, J. Math. Computers Simulation, vol. 39, pp. 541–548, 1995.

[18] Goodwin, G.C. and R.L. Payne *Dynamic System Identification: Experiment Design and Data Analysis.* Academic Press, New York, 1977.

[19] Goodwin, G.C. and K.S. Sin *Adaptive Filtering, Prediction and Control.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J, 1984.

[20] Haber, R. and L. Keviczky *Nonlinear System Identification – Input-Output Modelling Approach*, Vol. 1: Nonlinear System Parameter Identification, Vol. 2: Nonlinear System Structure Identification, Kluwer Academic Publishers, 1999.

[21] A. Hac. Adaptive control of vehicle suspension. *Vehicle System Dynamics*, pages 57–74, 1987.

[22] Hannan, E.J. and B.G. Quinn The determination of the order of an autoregression. *J. Royal Stat. Soc. Ser. B.*, vol. 41, pp. 713–723, 1979.

[23] M.H. Hayes, *Statistical Digital Signal Processing and Modeling*, John Wiley & Sons, 1996

[24] Ho, B.L. and R.E. Kalman Effective construction of linear state-variable models from input-output functions. *Regelungstechnik*, vol. 12, pp. 545–548, 1965.

DOI: 10.15477/SZE.MMTDI.2017.007

[25] Kailath, T., R.K. Mehra and D.O. Mayne, eds. *Special Issue on System Identification*, IEEE Trans. Automatic Control, vol. 19, no. 6, 1974.

[26] Keresztes A, Bokor J, Varlaki P, Michelberger P *Identification of Partially Known Vibrating Structures*, Vehicle System Dynamics 18: pp. 310-321, 1989.

[27] L. Keviczky, J. Bokor, and Cs. Banyasz, *A new identification method with special parametrization for model structure determination*, in Proceedings of the 5th IFAC Symposium on System Identification, Darmstadt, Germany, pp. 651–568, 1979.

[28] Ljung, L. and A.J.M. van Overbeek Validation of approximate models obtained from prediction error identification. *Proc. 7th IFAC Congress*, Helsinki, paper 45 A.3, pp. 1899–1980, 1978.

[29] Ljung, L. and T. Söderström *Theory and Practice of Recursive Identification*. MIT Press, Cambridge, Mass, USA, 1983.

[30] L. Ljung, *System Identification: Theory for the User* (2nd Ed.), Prentice Hall PTR, Upper Saddle River, NJ, USA, 1999.

[31] P. Michelberger, Ilosvai L, Keresztes A, Péter T, *Normality analysis of dynamic stresses in buses depending on stop lengths*, Periodica Polytechnica: Transportation Engineering, vol. 10, pp. 53–59. 1982.

[32] P. Michelberger, A. Keresztes and T. Péter, Effect of Real Road Profile Spectra Distorted by Travel Speed Processes on Dynamics Stresses of Town Buses, *Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae*, Vol. 97, pp. 227–239, 1984.

[33] P. Michelberger, J. Bokor, A. Keresztes and P. Várlaki, *Identification of a Multivariable Linear-model for Road Vehicle (bus) Dynamics From Test Data*, International Journal of Vehicle Design 8:(1) pp. 96-114, 1987.

[34] Michelberger P , Bokor J , Keresztes A and Várlaki P *Research Trends in the Bus Industry - A Contribution to General Vehicle Development*, International Journal of Vehicle Design 11:(4-5) pp. 347-353, 1990.

[35] Michelberger P, Palkovics L and Bokor J *Robust design of active suspension system*, International Journal of Vehicle Design 14:(2/3) pp. 145-165, 1993.

[36] *Signal Processing Toolbox User's Guide*, The MathWorks, Inc., 2001

[37] *System Identification Toolbox User's Guide*, The MathWorks, Inc., 2014

DOI: 10.15477/SZE.MMTDI.2017.007

[38] Palkovics L. and Bokor J. Intelligent vehicle/road system research, In: Bokor J, Nándori E, Várlaki P (szerk.), Studies in vehicle engineering and transportation science: a festschrift in honour of professor Pál Michelberger on occasion of his 70th birthday. Budapest: Hungarian Academy of Sciences - Budapest University of Technology and Economics, pp. 169-190, 2000.

[39] D.B. Percival and A. T. Walden, *Spectral Analysis for Physical Applications: Multitaper and Conventional Univariate Techniques*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1993.

[40] Peter T, Bellay A, *Integral Transformations of Road Profile Excitation for Variable Vehicle Speeds*, Vehicle System Dynamics, vol. 15, pp. 19–40, 1986.

[41] Péter, T. (1994) *Gépjármű lengőrendszerek felfüggesztés-paramétereinek optimálása*, kandidátusi értekezés, Budapest, 1994.

[42] J.D. Robson. Road surface description and vehicle response. *Int. J. of Vehicle Design*, pages 25–35, 1979.

[43] Rozanov, Yu. A. *Stationary Random Processes*. Holden-Day, San Francisco, 1967.

[44] M. Sayers. Characteristic power spectral density functions for vertical and roll components of road roughness. *Symp. on Simulation and Control of Ground Vehicles and Transportation Systems*, pages 113–139, 1986.

[45] Szabó Z, Gáspár P, Bokor J *Discussion on: combining slip and deceleration control for brake-by-wire control systems: a sliding-mode approach*, European Journal of Control 13:(6) pp. 615-617, 2007.

[46] Gáspár P, Szászi I, Bokor J *Active suspension design using linear parameter varying control*, International Journal of Vehicle Autonomous Systems 1:(2) pp. 206-221, 2003.

[47] Schoukens, J. and R. Pintelon *Identification of Linear Systems – A Practical Guideline for Accurate Modeling*. Pergamon Press, London, 1991.

[48] Södeström, T. and P. Stoica Comparison of some instrumental variable methods. Consistency and accuracy aspects. *Automatica*, vol. 17, pp. 101–115, 1981

[49] Södeström, T. and P. Stoica *Instrumental Variable Methods for System Identification*. Lecture Notes in Control and Information Sciences, Springer-Verlag, New York, 1983.

[50] Terdik Gy, Várlaki P, Bokor J, et al, On problem of stochastic bilinear realization, In: Sydow A (szerk.), Computational systems analysis: topics and trends. Amsterdam, Elsevier, pp. 67–72, 1992.

DOI: 10.15477/SZE.MMTDI.2017.007

[51] Van den Hof, P.M.J. Closed-loop issues in system identification. *Annual Reviews in Control*, vol. 22, pp. 173–186. Elsevier Science, Oxford, UK., 1998.

[52] P.D. Welch, *The Use of Fast Fourier Transform for the Estimation of Power Spectra: A Method Based on Time Averaging Over Short, Modified Periodograms*, IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics, Vol. AU-15. Pgs. 70–73. 1967

DOI: 10.15477/SZE.MMTDI.2017.007

Saját Publikációk

[Sza06] V. Nagy, L. Bozóky, F. Szauter Reduction of vibration generated by the drive system of rail vehicles, *10th Conference on Vehicle System Dynamics, Identification and Anomalies*, Budapest, Magyarország, 2006.

[Sza06a] V. Nagy, L. Bozóky, L. Kiss, F. Szauter Measure system for wheel profiles of rail vehicles, *XIV. OGÖT*, Marosvásárhely, Románia, 2006.

[Sza07] V. Nagy, L. Bozóky, L. Kiss, F. Szauter Monitoring of railway wheel profile evolution with respect to the operation environment, *7th International Conference on Railway Bogies and Running Gears*, Budapest, Magyarország, 2007.

[Sza07a] V. Nagy, L. Bozóky, V. Tölgyesi, L. Kiss, F. Szauter, T. Orbán Computer aided characterization of railway vehicle wheel profiles based on experimental measurements, *AMMA 2007*, Kolozsvár, Románia, 2007.

[Sza07b] V. Nagy, L. Bozóky, L. Kiss, F. Szauter, T. Orbán Computer aided monitoring of wheel profile in railway vehicles, *XV. OGÖT*, Kolozsvár, Románia, 2007.

[Sza07c] F. Szauter, V. Nagy, L. Bozóky, B. Döme Decrease of abnormal wheel wear in an electric railway engine, *XV. OGÖT*, Kolozsvár, Románia, 2007.

[Sza08] A. Antal, Z. Varga, F. Szauter, J. Polák Jármű menetdinamikai kísérleti vizsgálata, *IFFK 2008*, Budapest, Magyarország, 2008.

[Sza08a] J.Ö. Székely, D. Czeglédi, J. Polák, F. Szauter Kísérleti célú napelem vizsgáló berendezés funkciója és kritériumai, *XXI. OGÖT*, Arad, Románia, 2013.

[Sza08b] V. Nagy, L. Bozóky, V. Tölgyesi, L. Kiss, F. Szauter, T. Orbán Change of wheel profiles of railway vehicles, *XVI. OGÖT*, Brassó, Románia, 2008.

[Sza09] V. Nagy, F. Szauter Alternatív, környezetbarát közlekedési rendszer megvalósíthatósága, *IFFK 2009*, Budapest, Magyarország, 2009.

[Sza09a] Z. Varga, F. Szauter The information content of the automatic gearboxes of buses of the vehicle during an operation, *8th Youth Symposium onExperimental Solid Mechanics*, 2009.

DOI: 10.15477/SZE.MMTDI.2017.007

[Sza09b] Z. Varga, F. Szauter The information content of the automatic gearboxes of buses of the vehicle during an operation, *8th Youth Symposium on Experimental Solid Mechanics*, 2009.

[Sza10] Z. Varga, F. Szauter The Information Content of the Automatic Gearboxes, *FISITA World Automotive Student Congress*, Budapest, Magyarország, 2010.

[Sza10a] F. Szauter, I. Kalincsák Motion feature of large trucks in roundabouts and turbo roundabouts, *XVII. OGÖT*, Nagybánya, Románia, 2010.

[Sza10b] F. Szauter, V. Nagy Mobil ütközési kísérletek méréstechnikai rendszerei, *XIX. OGÖT*, Csíksomlyó, Románia, 2010.

[Sza10c] V. Nagy, L. Bozóky, L. Kiss, F. Szauter The improvement of the electronic locomotive log of railway vehicles, *XVII. OGÖT*, Nagybánya, Románia, 2010.

[Sza10d] Z. Varga, F. Szauter The Information Content of the Automatic Gearboxes, *FISITA World Automotive Student Congress*, Budapest, Magyarország, 2010.

[Sza11] I. Kalincsák, F. Szauter A korszerű közlekedés és baleset-megelőzés szervezetelméleti összefüggései, *IFFK konferencia*, Budapest, Magyarország, 2011.

[Sza11a] F. Szauter, V. Nagy, J.Ö. Székely, E. Horváth Kerülő jármű stabilitási problémájának matematikai modellezése, *IFFK 2011*, Budapest, Magyarország, 2011.

[Sza11b] F. Szauter, J.Ö. Székely, E. Horváth Development of a vehicle-dynamic measurement and information system, *Hungarian Journal of Industrial Chemistry*, Veszprém, Vol. 39, pp. 305-308, 2011.

[Sza11c] Z. Varga, F. Szauter, J. Kósa *Járműmechatronika jegyzet*, SZE-GAMF, Győr, 2011.

[Sza13] F. Szauter, T. Péter, J. Bokor Examination of complex traffic dynamic systems, *Acta Technica Jaurinensis*, Vol. 6,pp. 11-17, 2013

[Sza13a] Zs. Bede, T. Péter, F. Szauter Variable network model, *IFAC Workshop on Advances in Control and Automation Theory for Transportation Applications (ACATTA 2013)* Isztanbul, Torokország, 2013.

[Sza13b] I. Lőrincz, F. Szauter, L. Veres Egyszerűsített napelem vizsgálati módszer kifejlesztése, *XXI. OGÖT*, Arad, Románia, 2013.

[Sza13c] F. Szauter, T. Péter, J. Bokor Komplex közlekedésdinamikai rendszer vizsgálata, *IFFK*, Budapest, Magyarország, 2013.

[Sza14] F. Szauter, T. Péter, J. Bokor A forgalmi folyamatok és a járműdinamikai folyamatok komplex analízise a közúti közlekedésben, *IFFK 2014*, Budapest, Magyarország, 2014.

[Sza14a] F. Szauter, T. Péter, J. Bokor Térbeli nemlineáris járműdinamikai analízis, komplex közúti közlekedési folyamatmodell alkalmazásával, *Közlekedéstudományi Szemle*, Vol. LXIV., No. 6., pp. 19-29, 2014.

[Sza14b] F. Szauter, T. Péter, I. Lakatos Examinations of complex traffic dynamic systems and new analysis, modeling and simulation of electrical vehicular systems, *10th IEEE/ASME MESA14, Mechatronic Control and Electrical Vehicular Systems*, 2014.

[Sza15] F. Szauter, T. Péter, J. Bokor Complex analysis of the dynamic effects of car population along the trajectories, *Proceedings of the 2015 ASME/IEEE International Conference on Mechatronic and Embedded Systems and Applications (MESA)*, Boston, Massachusetts, USA, 2015.

[Sza16a] F. Szauter, G. Istenes, G. Rödönyi Spectral Analysis of Suspension System of a Commercial City Bus, *IEEE 14th International Symposium on Intelligent Systems, SISY*, Szabatka, Szerbia, 2016.

[Sza16b] F. Szauter, G. Istenes, G. Rödönyi AR and ARMA Spectral Analysis of Suspension System of a Commercial City Bus, *IEEE 14th International Symposium on Computational Intelligence and Informatics. CINTI*, Budapest, Magyarország, 2016.