



Wéber Andrea

Nemlineáris rendszerek tenzorszorzat alapú
megoldhatósági analízise és irányítása

Doktori értekezés

Témavezető:

Prof. Dr. Kuczmann Miklós

az MTA Doktora

egyetemi tanár

Teljesítményelektronika és Villamos Hajtások Tanszék

Széchenyi István Egyetem

Infrastrukturális Rendszerek Modellezése és Fejlesztése Multidiszciplináris

Műszaki Tudományi Doktori Iskola

2023

Köszönetnyilvánítás

Elsőként köszönetet mondok a páromnak és a családomnak a mindennapos támogatásért, a tanácsokért. Köszönöm a szüleimnek és a nagyszüleimnek, hogy lehetővé tették egyetemi tanulmányaimat és támogattak az értekezés megvalósulása érdekében.

Hálásan köszönöm témavezetőmnek, Prof. Dr. Kuczmann Miklósnak, hogy segítette a kutatási munkámat és motivált a céljaim elérése érdekében. Köszönöm a Széchenyi István Egyetem Automatizálási Tanszékének és a Teljesítményelektronika és Villamos Hajtások Tanszékének támogatását. Köszönetem fejezem ki Prof. Dr. Baranyi Péternek, aki segített és ötleteket adott, útmutatást nyújtott, konzultációkon fogadott, ezzel hozzájárulva a kutatási munkám elkészítéséhez.

Összefoglaló

A kutatási téma a nemlineáris, parametrikus folytonos idejű, állapotter formában megfogalmazott rendszerek irányításához kapcsolódik, amely során a tenzorszorzat (TP) alapú modelltranszformációt alkalmazom a kvázilineáris paraméterváltozós (qLPV) modellekre, és vizsgálom a lineáris mátrix egyenlőtlenség (LMI) módszerével együtt.

A módszer a magasabb rendű szinguláris értékekre történő felbontáson (HOSVD) alapszik, és az LMI stabilitási feltételekkel a párhuzamos elosztott kompenzáció (PDC) keretrendszerben valósul meg. A HOSVD által generált lineáris időinvariáns (LTI) csúcsrendszereket (vertex system) használom a stabilitás tervezése során.

A tervezési módszerek lépései a következők:

1. A paraméterter változtatása; a nemlineáris tulajdonság csökkentése, ezzel újabb TP-modellek létrehozása a rendszerhez. A jobban teljesítő TP-modell kiválasztása.
2. A TP-modellek transzformációs terének változtatása, vizsgálata az LMI-alapú szabályozó megoldhatóságának szempontjából.
3. További vizsgálatok elvégzése a TP-modelleken; állapotmegfigyelő, zavarelnyomás tervezése, csillapodási sebesség (decay rate) meghatározása, bemeneti korlátozás. A jobban teljesítő TP-modell kiválasztása.

A TP-modelltranszformációt, a konvex burok manipulációját, a qLPV-modellezést, a csúcsrendszerek helyzetének manipulációját, és a csúcsrendszerek számának vizsgálatát számos kutatás és publikáció tartalmazza, több szakterület is alkalmazza a módszert. A transzformáció kiterjesztése, a paraméterter és a transzformációs tér vizsgálata azonban kevés hangsúlyt kapott az elmúlt években. Éppen ezért a disszertáció az említett területekre terjed ki.

Átfogó vizsgálatot követően bebizonyítottam, hogy a paraméterter és a transzformációs tér változtatása fontos és szükséges lépés, ugyanis előfordulhat, hogy egy rendszerhez tartozó adott TP-modell esetében jobban teljesít a szabályozó, vagy az állapotmegfigyelő. Egyébiránt az LMI-k érzékenyek a politopikus modell bármiféle manipulációjára. Ezért az elméleti összefoglalás mellett gyakorlati példákon keresztül is bemutatom a módszert: az irodalomból jól ismert TORA-rendszeren, illetve a kétszabadságfokú repülőgépszárny modellen (NATA) keresztül. Két, egymástól független rendszeren bemutatva bebizonyítottam, hogy a vizsgált rendszertől függ a nemlinearitás csökkentése során a jobban teljesítő TP-modell kiválasztása. Nem feltétlenül a kevésbé komplex TP-modell fog optimális eredményt adni. Ugyanis a nemlinearitás fokozatos csökkentése adott rendszereknél különböző TP-modellek esetében LMI-alapú szabályozóval különböző teljesítőképességű szabályozó eredményez, ezáltal nem biztos, hogy a kevésbé komplex, egyszerűbb TP-modell teljesít hatékonyabban. Továbbá a transzformációs tér változtatása is lehetséges mindaddig, amíg az LMI módszere még megvalósítható.

A TPtool nevű MATLAB Toolbox nem tartalmazza az állapotmegfigyelő és a zavarok elnyomásának tervezéséhez kapcsolódó LMI stabilitási feltételeket, továbbá elavult parancsokat is tartalmaz, ezért a disszertációban ismertetem a megfelelő algoritmusokat, amelyekkel bővíttem a meglévő toolboxot.

Summary

The topic of the research is related to the control theory of nonlinear parametric continuous-time state-space systems, where I apply the tensor product (TP) model transformation to quasi-linear parameter varying (qLPV) state-space models and investigate the transformation in conjunction with linear matrix inequality (LMI). The method is based on the higher-order singular value decomposition (HOSVD) and is implemented in the parallel distributed compensation (PDC) framework with LMI stability conditions. The weighting functions generated by HOSVD and linear time invariant (LTI) vertex systems are used in the stability design. The steps of the design methods are as follows:

1. Varying the parameter space and reducing the nonlinear behavior. Thus, creating new TP models for the system and selecting the better performing TP model.
2. Varying the transformation space of the TP models, investigation of the feasibility of the LMI based controller of TP models.
3. Additional examinations on the TP models; observer, disturbance rejection, decay rate, input constraint. Selection of the better performing TP model.

The TP model transformation, convex hull manipulation, qLPV-modelling, manipulation of the position of vertex systems, number of vertex systems are covered in many researches and publications, and applied in several disciplines. The extension of the transformation, the study of the parameter space and the transformation space have received little attention in recent years. Therefore, the dissertation covers these areas.

I have proved and extensively investigated that changing the parameter space and the transformation space is an important and necessary step, as it may be that a controller or observer performs better for a given TP model for a system. Besides, LMIs are sensitive to any manipulation of the polytopic model. Therefore, in addition to the theoretical summary, I will also illustrate the method through practical examples: the TORA system and the two degrees of freedom nonlinear aeroelastic test apparatus (NATA) model. By demonstrating two independent systems, I have proved that selecting of the better performing TP model in reducing non-linearity depends on the system under investigation. Not necessarily the less complex TP model will give the optimal result. In fact, I have proven that the gradual reduction of nonlinearity for a given system results in different performance for different TP models with LMI based controllers, and thus it is not certain that the less complex and simpler TP model performs better. Besides, it is possible to vary the transformation space as long as the LMI method is still feasible.

The MATLAB TPtool Toolbox does not include the LMI stability conditions for the observer and disturbance rejection design, furthermore, it contains obsolete commands, so the corresponding algorithms are presented in this dissertation.

Tartalomjegyzék

Rövidítések és jelölések

Rövidítések	
Jelölések	

I. Bevezető és tudományos háttér

1. Bevezetés	1
1.1. A kutatás előzményei, tudományos háttere	1
1.1.1. Nemlineáris rendszerek modellezése a qLPV alakban	1
1.1.2. A HOSVD alkalmazása	2
1.1.3. Az LMI alkalmazása és a PDC keretrendszer	3
1.1.4. A TP-modelltranszformáció	3
1.1.5. A TPtool Toolbox	4
1.2. A kutatás célja	5
1.3. A dolgozat felépítése	5
2. Tenzorszorzat alapú modell reprezentáció	7
2.1. A TP-függvény	7
2.1.1. A TS-fuzzy modell és a TP-modell	7
2.1.2. A konvex TP-függvény	8
2.2. A qLPV-modell alapú TP-struktúra	11
2.3. Tenzorszorzat alapú modelltranszformáció	14
2.3.1. A PDC keretrendszer	14
2.3.2. A HOSVD módszer	15
2.3.3. A TP-modell alapú transzformáció és lépései	18
2.4. Tenzorszorzat alapú szabályozó és megfigyelő	23
2.4.1. A szabályozó tervezése	23
2.4.2. Az állapotmegfigyelő tervezése	24
2.4.3. A zavar elnyomásának tervezése	26
3. Lineáris mátrix egyenlőtlenség módszere	27
3.1. Az LMI	27
3.2. Az LMI struktúrája	28
3.3. LMI mátrix változókkal	28
3.4. Az LMI alkalmazásának formái	29

3.5. LMI stabilitási feltételek	31
3.5.1. Az LMI-alapú szabályozó	31
3.5.2. Az LMI-alapú állapotmegfigyelő	35
3.5.3. A H_∞ alapú zavarelnyomás	37
4. A validált alkalmazások bemutatása	38
4.1. TORA rendszer	38
4.1.1. A TORA rendszer qLPV-modellje	38
4.2. Kétszabadságfokú repülőgépszárny modell (NATA)	39
4.2.1. A repülőgépszárny qLPV-modellje	40
II. Új tudományos eredmények	42
5. A paramétertér változtatása	43
5.1. A nemlineáris tulajdonság redukálása	43
5.1.1. A TORA rendszer TP-modell változatai	45
5.1.2. A repülőgépszárny TP-modell változatai	51
5.2. A tudományos eredmények összefoglalása	59
6. A transzformációs tér változtatása	60
6.1. Megoldhatósági vizsgálat az LMI-alapú szabályozó tervezéséhez	60
6.1.1. A TORA rendszer megoldhatósági vizsgálata	60
6.1.2. A repülőgépszárny modell megoldhatósági vizsgálata	64
6.2. A tudományos eredmények összefoglalása	68
7. Aszimptotikus stabilitás vizsgálat	69
7.1. TORA rendszer stabilitása	69
7.1.1. TORA TP-modell 2 stabilitása állapotmegfigyelővel	74
7.1.2. TORA TP-modell 2 zavarok elnyomása	75
7.2. Repülőgépszárny modell stabilitása	76
7.2.1. A repülőgépszárny TP-modell 4 stabilitása	79
7.3. A tudományos eredmények összefoglalása	83
III. Összefoglaló és publikációk	84
8. Tézisek: új tudományos eredmények összefoglalása	85
9. Konklúzió	87
10.A szerző publikációi	88
Irodalomjegyzék	89

Ábrák jegyzéke

2.1.	Egy harmadrendű \mathcal{A} tenzor 3-módú mátrixai [6]	16
2.2.	Egy harmadrendű tenzor HOSVD felbontása [6]	17
2.3.	A szabályozó állapotviszacsatolással	23
2.4.	A megfigyelő állapotviszacsatolással	25
2.5.	A zavar elnyomása állapotviszacsatolással	26
4.1.	A TORA rendszer [23]	39
4.2.	Kétdimenziós lapos lemez szárnyprofil (NATA) [11]	40
5.1.	Ugyanazon TP-modell bemenetének változatai [5]	44
5.2.	A TORA TP-modell 1 súlyfüggvényei p_1 paraméterre	46
5.3.	A TORA TP-modell 1 súlyfüggvényei p_2 paraméterre	46
5.4.	A TORA TP-modell 2 súlyfüggvényei p_1 paraméterre	48
5.5.	A TORA TP-modell 2 súlyfüggvényei p_2 paraméterre	48
5.6.	A TORA TP-modell 2 súlyfüggvényei p_3 paraméterre	48
5.7.	A TORA TP-modell 3 súlyfüggvényei p_1 paraméterre	49
5.8.	A TORA TP-modell 3 súlyfüggvényei p_2 paraméterre	49
5.9.	A TORA TP-modell 3 súlyfüggvényei p_3 paraméterre	49
5.10.	A TORA TP-modell 4 súlyfüggvényei p_1 paraméterre	50
5.11.	A TORA TP-modell 4 súlyfüggvényei p_2 paraméterre	50
5.12.	A TORA TP-modell 4 súlyfüggvényei p_3 paraméterre	50
5.13.	A TORA TP-modell 5 súlyfüggvényei p_1 paraméterre	52
5.14.	A TORA TP-modell 5 súlyfüggvényei p_2 paraméterre	52
5.15.	A TORA TP-modell 5 súlyfüggvényei p_3 paraméterre	52
5.16.	A repülőgépszárny TP-modell 1 súlyfüggvényei p_1 paraméterre	53
5.17.	A repülőgépszárny TP-modell 1 súlyfüggvényei p_2 paraméterre	53
5.18.	A repülőgépszárny TP-modell 2 súlyfüggvényei p_1 paraméterre	53
5.19.	A repülőgépszárny TP-modell 2 súlyfüggvényei p_2 paraméterre	53
5.20.	A repülőgépszárny TP-modell 3 súlyfüggvényei p_1 paraméterre	55
5.21.	A repülőgépszárny TP-modell 3 súlyfüggvényei p_2 paraméterre	55
5.22.	A repülőgépszárny TP-modell 3 súlyfüggvényei p_3 paraméterre	55
5.23.	A repülőgépszárny TP-modell 4 súlyfüggvényei p_1 paraméterre	56
5.24.	A repülőgépszárny TP-modell 4 súlyfüggvényei p_2 paraméterre	56
5.25.	A repülőgépszárny TP-modell 4 súlyfüggvényei p_3 paraméterre	56
5.26.	A repülőgépszárny TP-modell 5 súlyfüggvényei p_1 paraméterre	58
5.27.	A repülőgépszárny TP-modell 5 súlyfüggvényei p_2 paraméterre	58
5.28.	A repülőgépszárny TP-modell 5 súlyfüggvényei p_3 paraméterre	58

6.1. A TORA TP-modell 1 megoldhatósági régiók	61
6.2. A TORA TP-modell 2 megoldhatósági régiók	61
6.3. A TORA TP-modell 3 megoldhatósági régiók	62
6.4. A TORA TP-modell 4 megoldhatósági régiók	63
6.5. A TORA TP-modell 5 megoldhatósági régiók	63
6.6. A repülőgépszárny TP-modell 1 megoldhatósági régiók	64
6.7. A repülőgépszárny TP-modell 2 megoldhatósági régiók	65
6.8. A repülőgépszárny TP-modell 3 megoldhatósági régiók	65
6.9. A repülőgépszárny TP-modell 4 megoldhatósági régiók	66
6.10. A repülőgépszárny TP-modell 5 megoldhatósági régiók	66
7.1. A TORA TP-modellek $x_3(t)$ állapotváltozói	70
7.2. A TORA TP-modellek $x_4(t)$ állapotváltozói	71
7.3. A TORA TP-modellek $u(t)$ szabályozó jelei	71
7.4. A TORA TP-modell 2 $x_3(t)$ állapotváltozói	72
7.5. A TORA TP-modell 2 $x_4(t)$ állapotváltozói	73
7.6. A TORA TP-modell 2 $u(t)$ szabályozó jelei	73
7.7. A TORA TP-modell 2 $x_3(t)$ állapotváltozói	76
7.8. A TORA TP-modell 2 $x_4(t)$ állapotváltozói	76
7.9. A TORA TP-modell 2 $u(t)$ szabályozó jelei	77
7.10. A repülőgépszárny TP-modellek $x_1(t)$ állapotváltozói	78
7.11. A repülőgépszárny TP-modellek $x_2(t)$ állapotváltozói	79
7.12. A repülőgépszárny TP-modellek $u(t)$ szabályozó jelei	80
7.13. A repülőgépszárny TP-modell 4 $x_1(t)$ állapotváltozói	80
7.14. A repülőgépszárny TP-modell 4 $x_2(t)$ állapotváltozói	81
7.15. A repülőgépszárny TP-modell 4 $u(t)$ szabályozó jelei	81

Rövidítések és jelölések

Rövidítések

CHOSVD	Kompakt magasabb rendű szinguláris értékekre történő felbontás (Compact Higher-Order Singular Value Decomposition)
CNO	Közel normál (Close to Normal)
CP	Konvex probléma (Convex Problem)
EVP	Sajátérték probléma (Eigenvalue Problem)
GEVP	Általánosított sajátérték probléma (Generalized Eigenvalue Problem)
HOSVD	Magasabb rendű szinguláris értékekre történő felbontás (Higher-Order Singular Value Decomposition)
INO	Inverz normál (Inverse Normal)
IRNO	Inverz és relaxált normál (Inverted and Relaxed Normal)
LMI	Lineáris mátrix egyenlőtlenség (Linear Matrix Inequality)
LMIP	Lineáris mátrix egyenlőtlenség probléma (Linear Matrix Inequality Problem)
LPV	Lineáris paraméterváltozó (Linear Parameter Varying)
LTI	Lineáris időinvariáns (Linear Time Invariant)
LQ	Lineáris kvadratikus (Linear quadratic)
LQR	Lineáris kvadratikus szabályozó (Linear-Quadratic Regulator)
NATA	Nemlineáris aeroelasztikus teszt készülék (Nonlinear Aeroelastic Test Apparatus)
NN	Nem negatív (Non-Negative)
NO	Normál (Normal)
PDC	Párhuzamos elosztott kompenzáció (Parallel Distributed Compensation)
PID	Proporcionális integrál derivált (Proportional Integral Derivative)
qLPV	kvázi lineáris paraméterváltozó (quasi-Linear Parameter Varying)
RHOSVD	Redukált magasabb rendű szinguláris értékekre történő felbontás (Reduced Higher-Order Singular Value Decomposition)
RNO	Relaxált normál (Relaxed Normal)
SN	Normalizált összeg (Sum Normalized)
SVD	Szinguláris értékekre történő felbontás (Singular Value Decomposition)
TORA	Transzlációs oszcillátor rotációs működtető szerkezettel (Translational Oscillations with an Eccentric Rotational Proof-Mass Actuator)
TP	Tenzorszorzat (Tensor Product)
TS	Takagi Sugeno

Jelölések

$\{a, b, \dots\}$	skalár
$\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \dots\}$	vektor
$\{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \dots\}$	mátrix
$\{\mathcal{A}, \mathcal{B}, \dots\}$	tenzor
$\mathcal{A} \boxtimes_{n=1}^N \mathbf{U}_n$	az irányításelméletben alkalmazott kompakt többszörös tenzorszorzat, ahol \boxtimes műveleti jel a tenzorszorzatot jelenti
$(\mathbf{A})_{ij} = a_{ij}$	\mathbf{A} mátrix i sora j oszlopa
$\mathbf{A}_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$	rendszer mátrix
A_{N, i_N}	antecedens halmaz
\mathcal{B}	tenzormag
B_{i_1, \dots, i_N}	konzekvens halmaz
$\mathbf{B}_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$	bemeneti mátrix
$\mathbf{C}_i \in \mathbb{R}^{q \times n}$	kimeneti mátrix
\mathcal{C}_o	konvexitás jelölése
$\mathbf{D}_i \in \mathbb{R}^{q \times m}$	átviteli mátrix
\mathcal{F}	szabályozó tenzor
$\mathbf{F}(\mathbf{p}(t))$	szabályozó mátrix
\mathcal{F}	tenzorban tárolt szabályozó erősítések
$\mathbf{F}_{i_1, i_2, \dots, i_N}$	szabályozó erősítéseket tartalmazza
I	az LTI rendszerek teljes száma
$\mathbf{K}(\mathbf{p}(t))$	megfigyelő mátrix
\mathcal{K}	megfigyelő tenzor
$\mathbf{K}_{i_1, i_2, \dots, i_N}$	megfigyelő erősítéseket tartalmazza
\mathcal{K}	tenzorban tárolt megfigyelő erősítések
$M = M_1 \times \dots \times M_N$	diszkretizációs rács minden n dimenzióra
\mathbb{N}	természetes számok halmaza
$n = 1 \dots N$	a dimenziók indexe
$\mathbf{p}(t)$	paraméter vektor
\mathbb{R}	valós számok halmaza
$\mathbf{S}(\mathbf{p}(t))$	az LPV állapottér alak rendszer mátrixa
$\mathbf{S}(\mathbf{p}(t))$	rendszer mátrix
\mathcal{S}	rendszer tenzor
\mathcal{S}	tenzorban tárolt rendszer mátrix
$\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$	bemeneti vektor
$\hat{\mathbf{u}}(t)$	becsült szabályozó jel
$\mathbf{v}(t)$	zavar
$\Omega = w_1 \times \dots \times w_N$	transzformációs tér minden n dimenzióra
w_i	súlyfüggvények
$w_i(\mathbf{p}(t))$	időben változó súlyfüggvény
w_n	tagsági függvények
$\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$	állapot vektor
$\hat{\mathbf{x}}(t)$	becsült állapotvektor
\mathcal{Y}	kimeneti tenzor
$\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^q$	kimeneti vektor
$(\mathbf{y}(t) - \hat{\mathbf{y}}(t))$	kimeneti hiba

$y(t)$	mért kimenet
$\hat{y}(t)$	becsült kimenet

A TORA rendszer paramétere

ε	kapcsolási paraméter
e	az inga excentricitása
F	a kocsira ható zavaró erő
I	az inga tehetetlenségi nyomatéka
k	a lineáris rugó
M	a koci tömege
m	az inga tömege
N	a próbatömegre ható vezérlőnyomaték
$\theta(t)$	szöghelyzet
$\dot{\theta}(t)$	a forgási próbatömeg sebessége
$\xi(t)$	a koci mozgási helyzete
$\dot{\xi}(t)$	a koci mozgási sebessége

A NATA repülőgépszárny modell paramétere

a	a középhúr és a rugalmas tengely közötti dimenziótlan távolság
$\dot{\alpha}(t)$	billenési elmozdulási sebesség
$\alpha(t)$	billenési elmozdulás
β	vezérlőfelület elhajlása
b	a szárnyhoz tartozó félhúr
c_{α}	dőlés szerkezeti-csillapítási együttható
c_h	merülés szerkezeti-csillapítási együtthatók
$c_{l_{\alpha}}$	felhajtóerő együtthatók támadási szögként
$c_{l_{\beta}}$	felhajtóerő együtthatók vezérlőfelület-kihajlásoként
$c_{m_{\alpha}}$	nyomatéki együtthatók támadási szögként
$c_{m_{\beta}}$	nyomatéki együtthatók vezérlőfelület-kihajlásoként
$h(t)$	merülési elmozdulás
$\dot{h}(t)$	merülési elmozdulási sebesség
I_{α}	tömeg tehetetlenségi nyomatéka
$k_{\alpha}(\alpha)$	nemlineáris merevségi hozzájárulás
k_h	merülés szerkezeti rugóállandó
L	aerodinamikai erő
m	a szárny tömege
M	aerodinamikai nyomaték
ρ	a szabad áramlású levegő sűrűsége
$U(t)$	szabad áramlási sebesség
x_{α}	a rugalmassági tengely és a tömegközéppont közötti dimenziótlan távolság

I. rész

Bevezető és tudományos háttér

1. fejezet

Bevezetés

A disszertáció középpontjában a modern irányításelmélet területéhez kapcsolódó többváltozós, nemlineáris, parametrikus, állapottér alakban megfogalmazott, folytonos idejű rendszerek nemlineáris irányításának tervezése áll. A kutatás témája a tenzorszorzat (TP)-modelltranszformáció vizsgálata többféle szempontból, valamint annak alkalmazása, megoldhatósága, amelyet két, az irodalomból jól ismert rendszerrel illusztrálva mutatok be. A disszertációban ismertetett eredményeket matematikai, numerikus és irányításelméleti módszerekkel szemléltetem.

1.1. A kutatás előzményei, tudományos háttere

Az irodalmi háttér bemutatásához számos referencia áll rendelkezésemre az elmúlt évtizedekből; publikációk, konferencia cikkek, könyvek stb. A kutatás előzményeinek összefoglalásához felhasznált dokumentumok a következők: [1–7, 15–17, 20, 21, 171].

1.1.1. Nemlineáris rendszerek modellezése a qLPV alakban

A lineáris paraméterváltozó (LPV) rendszerek a lineáris időinvariáns rendszerek (LTI) és a nemlineáris időben változó rendszerek között egy olyan rendszerosztály, amely során paraméterezett lineáris rendszerekként modellezhetők. Az LPV rendszerek paraméterei az állapotukkal változnak, tehát rendszermatrixai egy exogén, időben változó paramétervektortól függenek [72].

A kvázi lineáris paraméterváltozós (qLPV) állapottér reprezentáció alkalmas a nemlineáris rendszerek matematikai modellezésére, amelyet súlyfüggvények és LTI rendszerek együttes kombinációja révén érhetünk el. A qLPV rendszerek használata számos irányításelméleti területen feltűnik: H_∞ szabályozás és robusztus szabályozás tervezése; pályakövetési irányítási probléma a folyamat qLPV-modellezésével és a lineáris mátrix egyenlőtlenség (LMI) alapú állapotmegfigyelővel [47], robusztus robotpilóta tervezése a qLPV alakú rakéta-modellhez [45], nemlineáris rendszerek szabályozójának erősítés ütemezése; globális erősítés ütemezés tervezése qLPV-moddal [42], intelligens szabályozás; bizonytalan diszkrét idejű fuzzy dinamikus rendszerek kvadratikus stabilizálásának megközelítése [40], intelligens vezérlőrendszerek adaptív tanulási folyamatának tervezése [43],

csúszómód szabályozás; determinisztikus adaptív szabályozás tervezése [41], optimalizáció alapú szabályozás; repülő járművek optimalizáció alapú szabályozása [44], pszeudo-linearizáció; oldalirányú gyorsulásnövelő robotpilóta tervezése [46] stb. Éppen ezért a qLPV módszere számos irányításméletben felmerülő problémára alkalmazható. A kutatásom során én is a qLPV állapottér alakot használom.

A kutatásom során felhasználtam számos irányítástechnikán alapuló könyvet [85–87], továbbá egyéb kapcsolódó irodalmat. Az LMI egy módszer a nemlineáris rendszerek szabályozására, azonban létezik több szabályozó tervezési eljárás lineáris és nemlineáris rendszerekre. Ide tartozik többek között a proporcionális integrál derivált (PID) szabályozó tervezése [76, 77, 176], amelyekben bemutatják az inverz inga szabályozásának tervezését. A lineáris kvadratikus szabályozó (LQR) tervezése inverz ingára [75] és a lineáris szabályozó tervezése inverz ingára [78], superkavitációs járműre [158], lineáris állapotter modellezése és tanítása a MaxWhere virtuális környezetben [165], új polinomiális idejű algoritmus tervezése [172], bizonytalan rendszerek stabilizálása [183], valamint a negyedjarmű modell aktív felfüggesztéséhez szabályozó tervezése [192]. Ezen kívül további tervezési módszer lehet a fuzzy szabályozás nemlineáris rendszerekre [90, 123, 152, 153], fuzzy szabály csökkentése [99], fuzzy szabály interpoláció [161–163] és fuzzy rendszerek stabilizálása [167–169, 177]. Egyéb módszerek pedig a robusztus szabályozás [122, 138, 175], valamint iteratív szabályozás [135].

1.1.2. A HOSVD alkalmazása

A mátrixok szinguláris értékekre történő bontása (SVD) [24] a lineáris algebra és a lineáris algebra alapú jelfeldolgozás egyik széles körben alkalmazott eszköze. A mátrixok felbontásának története az 1850-es években kezdődött. Számos matematikus - Eugenio Beltrami (1835-1899), Camille Jordan (1838-1921), James Joseph Sylvester (1814-1897), Erhard Schmidt (1876-1959) és Hermann Weyl (1885-1955) - vett részt a szinguláris értékekre történő felbontás elméletének kidolgozásában [49].

Az SVD módszert a fuzzy közelítésben az [56, 57] publikációkban javasolták, miszerint a függvényt négyszögletes rácspontok halmazán kell mintavételezni, és a minta mátrixára a szinguláris értékek felbontását kell alkalmazni. Az SVD fontos szerepet játszik a jelfeldolgozás tudományterületén is [52, 54, 55]. Egy részletesebb tanulmány a többdimenziós SVD alkalmazásáról és elméletéről 2000-ben jelent meg [58]. A tanulmányban megvizsgálták, hogy a tenzor szimmetriák hogyan befolyásolják a felbontást, illetve javasolták a szimmetrikus sajátérték felbontás multilineáris általánosítását a páronként szimmetrikus tenzorokra.

A magasabb rendű szinguláris értékekre történő felbontás (HOSVD) alkalmazását 2000-ben publikálták először [50]: magasabb rendű tenzorok mátrix reprezentációjára. Következésképpen adott N -dimenziós tenzort egy teljes ortonormált rendszerré tud bontani a szinguláris értékek speciális sorrendjében, kifejezve a tenzor rangjának tulajdonságait az L_2 -norma sorrendjében.

Egy általános qLPV-modell analitikus átalakítása a TP-modell formájába rendkívül fáradságos folyamat, ha egyáltalán megvalósítható. Emiatt egy olyan HOSVD-n alapuló számítási eljárást javasoltak [6], amellyel numerikus úton könnyedén konvertálható bármilyen adott qLPV-modell TP-modell formába. Tehát a HOSVD alkalmazása egy adott N -dimenziós tenzorra kétdimenziós ortonormált mátrixok halmazát eredményezi és a különböző komponensek fontosságát a szinguláris értékek csökkenő sorrendjében fejezi ki. A HOSVD alkalmazásával kapcsolatos további kutatások: [34, 35, 81, 98, 134, 166].

1.1.3. Az LMI alkalmazása és a PDC keretrendszer

A konvex optimalizálási problémák megoldására hatékony numerikus matematikai módszereket és algoritmusokat fejlesztettek ki az LMI-k formájában [20, 21, 27, 30, 59]. A Lyapunov-stabilitási feltételek LMI-ben történő megfogalmazását a különféle problémák esetében használták [60–71, 173, 182, 184, 185]: optimális LQ szabályozás, a H_∞ szabályozás, a robusztus stabilitás, a pólus áthelyezés, a bemeneti és kimeneti korlátozások stb. Ezen kívül az LMI-alapú módszer alkalmazása más területekre is kiterjed, pl. a becslés, azonosítás, az optimalizálás, az optimalizálás, a mátrix méretezési problémák stb. [27]. A numerikusan könnyedén kezelhető LMI formába többféle specifikációt és célkitűzést lehet megfogalmazni.

A TP-modelltranszformáció képes adott qLPV-modelleket olyan politopikus formába alakítani, amelyre az LMI módszere azonnal végrehajtható. Az LMI alkalmazása a TP-modelltranszformációval stabil szabályozót eredményez, azonban ugyanannak a TP-modellnek a különböző politopikus formái befolyásolják az LMI-alapú szabályozók teljesítményét (LMI feasibility). Az LMI alkalmazásával kapcsolatos tanulmányok száma folyamatosan növekszik az optimalizálás, az H_∞ szabályozás és a robusztus stabilitás tématerületeken. A numerikus módszerek alkalmazásával és a konvex optimalizálási módszerek segítségével nincs szükség nagy mennyiségű és időigényes matematikai egyenletek megoldására analitikus úton.

A párhuzamos elosztott kompenzáció (PDC) tervezésének módszere többnyire a Lyapunov-féle stabilitási feltételeken alapul. Ezáltal a PDC keretrendszer [7, 22, 170] megkönnyíti a TP transzformáció alapú szabályozó rendszerek tervezésének hatékony megvalósítását, ugyanis a TP-modell súlyfüggvényeinek felhasználásával a keletkező csúcsrendszereken (vertex system) keresztül az LMI-alapú optimalizálás numerikusan végrehajtható. A modell differenciálegyenletei sok esetben analitikus formában vannak megadva. Ezért előfordulhat, hogy az analitikus modellt TS-fuzzy modellé kell átalakítani annak érdekében, hogy a PDC tervezési keretrendszere alkalmazható legyen [22]. A PDC tervezés a TS-fuzzy modell minden egyes fuzzy szabályához egy fuzzy szabályt határoz meg a szabályozóban. Így tehát a TP-modell TS-fuzzy modellé alakítása precedens fuzzy halmazokkal megköveteli a PDC keretrendszer alkalmazását [22].

A keretrendszer megkönnyíti az LMI-alapú stabilitási feltételek többcélú változtatását: kvadratikus vagy aszimptotikus stabilitás, kimeneti és bemeneti korlátozások, csillapodási sebesség szabályozása, zavarok elnyomása stb. Mivel a TP-modelltranszformáció szabályozó tervezési módszere is a PDC keretrendszerre épül, ezáltal az LMI az LTI rendszerek konvex kombinációját határozza meg.

1.1.4. A TP-modelltranszformáció

A tenzor [154] fogalma nagy jelentőséggel bír az alkalmazott matematikában. A fizikai tudományok gyakorlatilag minden tudományágában használják valamilyen módon a tenzorokat. A tenzoralgebrát és a tenzorszorzatot, mint multilineáris transzformációt részletesen bemutatja R.M. Bowen és C. C. Wang által írt könyv [51].

A TP-modell formába történő átalakítás független attól, hogy az adott modell analitikus egyenletek formájában van-e megadva; fizikai, vagy lágyszámításon alapuló modell eredményeként, például neurális hálózatok vagy fuzzy logikán alapuló módszerek stb. A TP-modelltranszformáció lépéseit részletesen a P. Baranyi, Y. Yam és P. Várlaki által írt könyv taglalja [6]. A transzformáció egyetlen követelménye, hogy a modell diszkretizálha-

tó legyen a mintavételi rácson. A TP-modell egységes reprezentációt biztosít és könnyen alkalmazható a korszerű szabályozó tervezési módszerekhez is.

A szabályozás tervezésének optimalizálása három fő lépésben történhet:

- Első lépés: $\mathbf{S}(\mathbf{p}(t))$ rendszermátrix helyes meghatározása, ugyanis ez hatással van az LMI megoldhatóságára.
- Második lépés: konvex burok manipulálása.
- Harmadik lépés: LMI-alapú konvex optimalizálás.

A TP-modelltranszformációt 2000-es évek elején terjesztették ki először az LPV modellekre: ide tartozik többek között a TP-modelltranszformáció LMI alapú szabályozó tervezése [3, 22], kétdimenziós repülőgépszárny modell TP-modellje [11, 19], daru TP-modellje [37], TORA rendszer TP-modellje [23], inverz inga TP-modellje [33], HOSVD módszere [34, 35, 98], csúszómód szabályozás [36, 103], illetve egyéb kapcsolódó irodalmak [88, 94, 95, 97, 102, 104, 106, 145, 146].

A transzformáció az LPV modellekhez tartozó HOSVD-t generál; létrehozza az LTI modellek kombinációját, amely az adott LPV modellt reprezentálja oly módon, hogy: i) az LTI komponensek száma minimalizálódik; ii) a súlyfüggvények a paramétervektor egyváltozós függvényei; iii) a súlyfüggvények egy ortonormált rendszerben helyezkednek el minden paraméterre; iv) az LTI rendszerek pedig ortogonális helyzetben vannak; v) az LTI rendszerek és a súlyfüggvények a szinguláris értékek szerint vannak elrendezve.

Érdemes megemlíteni, hogy a TP-modelltranszformációt alkalmazták a diabétesz mellitusz modellre és szabályozására [178, 180, 181], illetve a vér folyadékmenyiség szabályozásához vértisztító terápiákban [179]. A TP-modelltranszformációval kapcsolatos további kutatások, publikációk: a TP-modelltranszformáció alkalmazása és vizsgálata LMI-alapú szabályozóval [1–3], különböző nemlineáris rendszerek TP-modelltranszformációja és LMI vizsgálata [10–16, 18, 19, 22, 23, 33, 36, 37, 79, 80, 82–84, 92–97, 100–121, 124–133, 136, 137, 139–151, 155–157, 159, 160, 164, 171, 174, 186–191].

Az újabb kutatási eredmény a témával kapcsolatban a TS-fuzzy modell paramétereinek manipulálása [5], amely publikáció a TP-modelltranszformáció kiterjesztését javasolja a TS-fuzzy modell bemenetének módosítása értelmében. Az új kiterjesztés során a javaslat a bemenetek számának megváltoztatásán alapul a nemlinearitás átalakításának figyelembevételével. Ez növeli a TP-modelltranszformáció modellezési képességét, valamint a nemlinearitás és a modell komplexitásának csökkenését eredményezi, csökkentve a fuzzy szabályok számát.

1.1.5. A TPtool Toolbox

A TPtool nevű Toolbox egy MATLAB Toolbox, amely letölthető a "<https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/25514-tp-tool>" felületen, amelyet P. Baranyi, Z. Petres és Sz. Nagy hoztak létre [32, 88]. A Toolbox célja a TP-modelltranszformáció algoritmusának megvalósítása és az azt követő szabályozó rendszer tervezése. A Toolbox segítségével egyszerűen alkalmazható a TP-modelltranszformáció és a konvex burok manipulálása. A Toolbox tulajdonképpen kitűnő útmutatást ad a TP-modelltranszformáció algoritmusának működéséről, azonban a felhasználó számos módosítást kell alkalmazzon, illetve új algoritmusokat készíthet, amelyek kompatibilisek a Toolboxszal. Továbbá a szabályozó rendszer tervezéséhez többféle módszer alkalmazása lehetséges, amely szintén kompatibilis a TP-modelltranszformációval.

1.2. A kutatás célja

Kutatási munkám során a tenzorszorzat modelltranszformáció alapú irányítástechnikában használt LMI szabályozó- és állapotmegfigyelő tervezési módszereinek megoldhatóságát vizsgálom a PDC keretrendszerben. A disszertáció egy komplex átfogó kutatást mutat be módszerelemzési és megvalósítási szempontból, amely során a TP-modelltranszformáció további kiterjesztését javaslom, és vizsgálom a paraméterter és a transzformációs tér változtatásának hatását a kiadódó LMI-k megoldhatóságára.

A dolgozatban két problémán keresztül mutatom be a javasolt kiterjesztett metódust: az egyik az akadémiai TORA (translational oscillations with an eccentric rotational proof-mass actuator) rendszer, a másik pedig egy valós mérnöki problémán alapul, ami a kétszabadságfokú repülőgépszárny modell (nonlinear aeroelastic test apparatus-NATA). A nemlineáris dinamikus rendszerek matematikai modellezéséhez a qLPV formában megadható állapotter felírást használom. A rendszerek numerikus modellezéséhez pedig a TP-modelltranszformáció, a HOSVD és az LMI módszereit alkalmazom, továbbá a numerikusan generált LTI rendszereket. A dolgozatban bemutatott módszer széleskörben alkalmazható az irányításelméletben felmerülő problémák megoldására.

A kutatásom során, a javasolt módszer végrehajtásához kitűzött céljaim a következők:

- Alternatív bemenetek létrehozása a TP-modellekhez, amelyek során csökken a modellben a nemlineáris függvények száma, és kevésbé komplex modellek keletkeznek, amely hatással van a stabilitásra, illetve a paraméterter változtatására.
- A TP-modellek nemlinearitása számának a csökkentése azáltal, hogy új paraméter kerül bevezetésre. A vizsgálathoz a két nemlineáris dinamikus rendszer „eredeti” qLPV állapotter alakja paraméterterének változtatása a kulcs tényező. Ennek során bemutatom, hogy a nemlineáris függvények számának csökkentése miatt a modell komplexitása is csökken.
- A különböző TP-modellek transzformációs terének változtatása és az LMI-k megoldhatóságának vizsgálata a szabályozó és az állapotmegfigyelő együttes használatával. Célom, hogy megvizsgáljam, ez milyen hatással van a TP-modellekre. A kutatásom során szemléltetem, hogy a transzformációs tér megoldhatósági régiói annál nagyobbak, minél inkább csökken a modellek nemlinearitása és komplexitása.
- A legjobban teljesítő szabályozó esetén azon TP-modell kiválasztása, amelyen a bemenetek számának változtatását, a nemlineáris tulajdonság csökkentését és az LMI-k megoldhatósági vizsgálatát elvégzem.
- További vizsgálatok: állapotmegfigyelő tervezése, zavarelnyomás tervezése, csillapodási sebesség meghatározása, bemeneti és kimeneti korlátozások tervezése az LMI stabilitási feltételek alkalmazásával.

1.3. A dolgozat felépítése

Az értekezés összesen 10 fejezetből áll. Az 1. fejezetben található a bevezetés, amelyben a dolgozat tudományos háttérét, a kutatási előzményeket, az alkalmazott módszereket, valamint a kutatás célját mutatom be.

A 2. fejezetben ismertetem a TP-modelltranszformációhoz kapcsolódó matematikai és numerikus kifejezéseket, tulajdonságokat, a TP-függvényt, a TS és TP-modell közötti különbségeket, a konvexitást, a súlyfüggvényeket, a qLPV állapotter modellezést, a TP transzformáció lépéseit, a PDC keretrendszert, a HOSVD módszert, valamint a szabályozó, az állapotmegfigyelő és a zavarok elnyomásának tervezését.

A 3. fejezet bemutatja az LMI módszert, annak alkalmazási formáit és előnyeit, a Lyapunov-egyenlőtlenséget, az LMI stabilitási feltételeket, és a MATLAB programban írt algoritmusokat, amelyeket a kutatásom során használtam.

A 4. fejezetben prezentálom a kutatáshoz és a tézisek bebizonyításához használt két nemlineáris dinamikus rendszert, amelyek a TORA rendszer és a kétszabadságfokú repülőgépszárny modell (NATA). A fejezet továbbá ismerteti a rendszerek qLPV állapotter reprezentációit, valamint a paramétereket.

Az 5. fejezetben szemléltetem a Tézis 1-hez kapcsolódó tudományos eredményeket, a paramétertér változtatását és vizsgálatát, amely magában foglalja a nemlineáris tulajdonság csökkentését.

A 6. fejezet az LMI megoldhatósági vizsgálatát mutatja be, amely a Tézis 2-höz és a tudományos eredmények bemutatásához kapcsolódik. Az LMI megoldását megelőzi a megoldhatósági vizsgálat.

A 7. fejezet taglalja az aszimptotikus stabilitást megvalósító szabályozót, állapotmegfigyelőt és a zavarelnyomás tervezését, valamint a csillapodási sebesség tervezését a két nemlineáris rendszerre. Ezenkívül a fejezet a Tézis 3-hoz is kapcsolódik, amely során a tudományos eredmények összefoglalásra kerülnek.

A 8. fejezetben ismertetem az összes tézist és altézist, amelyeket a dolgozat során bebizonyítottam.

A 9. fejezet a disszertáció és a kutatási eredmények összefoglalását tartalmazza.

A 10. fejezetben ismertetem az eddig megjelent publikációimat.

A dolgozatot az irodalomjegyzék zárja.

2. fejezet

Tenzorszorzat alapú modell reprezentáció

Ebben a fejezetben a tenzorszorzat alapú modell szerkezetének a meghatározását mutatom be az irodalomkutatás alapján [1–3, 6, 10–16].

2.1. A TP-függvény

Az $\mathcal{Y} = f(p) \in \mathbb{R}^{O_1 \times \dots \times O_K}$, $p \in \mathbb{R}^N$ függvény akkor nevezhető TP-függvénynek, ha a következő formában felírható [6] [15]:

$$\mathcal{Y} = \mathcal{S} \boxtimes_{n=1}^N \mathbf{w}_n(p_n(t)), \quad (2.1)$$

ahol \mathcal{Y} a kimenet, $n = 1, \dots, N \subset \mathbb{N}$, w_n a súlyfüggvény és p_n a súlyfüggvényhez tartozó paraméter. A \boxtimes műveleti jel a tenzorszorzatot jelenti. A súlyfüggvények elemei pedig a $w_{n,i}(p_n) \in [-1, 1]$ interallumon:

$$w_n(p_n) = (w_{n,1}(p_n) \cdots w_{n,I_n}(p_n)). \quad (2.2)$$

Az $\mathcal{S} \in \mathbb{R}^{I_1 \times \dots \times I_N}$ magtenzor elemei a tenzorokat tartalmazzák $O_1 \times \dots \times O_K$ méretben. Az \mathcal{S} tenzor a tenzor skalárelemeinek tekinthető $I_1 \times \dots \times I_N \times O_1 \times \dots \times O_K$ méretben.

Nem minden $f(p)$ függvény rendelkezik olyan TP-függvényszerkezettel, amelyben a magtenzor mérete korlátos. A (2.1) egyenlet felírható a tenzorművelet jelölése nélkül is [15]:

$$\mathcal{Y} = \mathcal{S} \boxtimes_{n=1}^N \mathbf{w}_n(p_n) = \sum_{i_1=1}^{I_1} \sum_{i_2=1}^{I_2} \cdots \sum_{i_N=1}^{I_N} \left[\prod_{n=1}^N w_{n,i_n}(p_n) \right] S_{i_1, i_2, \dots, i_N}, \quad (2.3)$$

ahol $S_{i_1, i_2, \dots, i_N} \in \mathbb{R}^{O_1 \times \dots \times O_K}$ jelöli \mathcal{S} tenzor elemeit, I pedig az LTI rendszerek teljes száma.

2.1.1. A TS-fuzzy modell és a TP-modell

A TS-fuzzy modell átviteli függvénye megegyezik a TP-modell átviteli függvényével [5]. A TS-fuzzy modell átviteli függvénye a tenzorszorzat függvényeinek osztályába tartozik.

A fuzzy szabály a következő:

$$\text{HA } A_{1,i_1} \text{ ÉS } \dots \text{ ÉS } A_{N,i_N} \text{ AKKOR } B_{i_1,\dots,i_N}, \quad (2.4)$$

ha a megfigyelés szingleton (egyelemű) fuzzy halmaz, amelynek egyetlen eleme p_n , akkor a B_{i_1,\dots,i_N} konzekvens (következmény) szintén egyelemű fuzzy halmaz b_{i_1,\dots,i_N} konzekvens elemekkel. Ha alkalmazzuk a szorzatösszeg-súlyközéppont (product-sum-gravity) következtetést, akkor a TS-fuzzy modell a következő formában írható fel [5]:

$$\mathcal{S}(p) = \sum_{i_1=1}^{I_1} \sum_{i_2=1}^{I_2} \cdots \sum_{i_N=1}^{I_N} \prod_{n=1}^N w_{n,i_n}(p_n) b_{i_1,i_2,\dots,i_N}, \quad (2.5)$$

ahol $w_{n,i_n}(p_n)$ az A_{N,i_N} antecedens (előzmény) halmaz tagsági függvénye, b_{i_1,i_2,\dots,i_N} pedig a konzekvens elemeit tartalmazza. Állapottér alakú rendszer modellezése esetén a konzekvens a $B_{i_1,i_2,\dots,i_N} \in \mathbb{R}^{O_1 \times O_2}$ rendszermátrix, amit csúcsrendszernek (vertex system) is neveznek. Ha a következmény polinom, akkor a következmény a koefficiens paraméterek tenzora lehet: $\mathcal{B}_{i_1,i_2,\dots,i_N} \in \mathbb{R}^{O_K}$. A (2.5) átviteli függvény a TP-modellek osztályához tartozik, amely tenzorművelettel kifejezve a következő:

$$\mathcal{S}(p) = \mathcal{B} \boxtimes_{n=1}^N \mathbf{w}_n(p_n), \quad (2.6)$$

ahol \mathcal{B} tenzormag a $\mathcal{B}_{i_1,i_2,\dots,i_N}$ LTI csúcsrendszereket tárolja, a $\mathbf{w}_n(p_n)$ súlyfüggvény pedig az antecedens halmaz tagsági függvénye.

2.1.2. A konvex TP-függvény

A konvexitás [6] meghatározza a TP-modell LTI csúcsrendszerei (a továbbiakban LTI rendszer) által létrehozott konvex burok típusát, ezáltal hatással van a szabályozó tervezésére és működésére. Ha a konvex burok csúcsait közvetlenül az LTI rendszerek beállításával és a súlyfüggvények kiszámításával lehetne definiálni, akkor egy szűk konvex burok jönne létre, azonban ez nem lehetséges, mert a csúcsrendszerek és a súlyfüggvények összekapcsolódnak a qLPV-modell megvalósítása miatt.

A többváltozós $w_i(\mathbf{p}(t))$ súlyfüggvények kielégítik az alábbi feltételeket [6, 7, 15–17]:

$$w_i(\mathbf{p}(t)) \in [0, 1], \quad (2.7)$$

$$\sum_{i=1}^I w_i(\mathbf{p}(t)) = 1. \quad (2.8)$$

A két feltétel együttes teljesülése azt eredményezi, hogy az $\mathbf{S}(\mathbf{p}(t))$ rendszermátrix lineáris kombinációja konvex. Mivel a konvexitás teljesül, ezért \mathcal{Y} mindig a konvex burkon belül van, amely burkot az $O_1 \times \dots \times O_K$ méretű magtenzor elemei határozzák meg, amely elemek a csúcok. A súlyfüggvények típusai határozzák meg a TP-modell típusát pl. CNO (Close to Normal) típusú súlyfüggvény esetén CNO típusú a TP-modell és így tovább.

Ha a súlyfüggvényekhez további jellemzőket vezetünk be, akkor a súlyfüggvények különböző típusainak felhasználásával a csúcsrendszerek által meghatározott konvex burok különböző szorosságát és alakját lehet befolyásolni. Tehát a $w(\mathbf{p}(t))$ vektornak különböző típusú $w_i(\mathbf{p}(t))$ súlyfüggvényei lehetnek [6] [15] [18]:

- **Sum Normalized (SN) konvex TP-függvény.** A TP-függvény SN típusú, amennyiben a súlyfüggvények összege minden $\mathbf{p}(t) \in \Omega$ transzformációs tér esetén 1.
- **Non-Negative (NN) konvex TP-függvény.** A TP-függvény NN típusú, ha $w_i(\mathbf{p}(t))$ súlyfüggvények nemnegatív típusúnak tekinthetők, vagyis ha minden értékük nemnegatív.
- **Normal (NO) konvex TP-függvény.** A TP-függvény NO típusú, ha a $w_i(\mathbf{p}(t))$ súlyfüggvények SN és NN típusúak, valamint a súlyfüggvények legnagyobb értéke 1.
- **Close to Normal (CNO) konvex TP-függvény.** A TP-függvény CNO típusú, amennyiben a $w_i(\mathbf{p}(t))$ súlyfüggvények egyszerre SN és NN típusúak, valamint a súlyfüggvények legnagyobb értéke 1, vagy közel 1.
- **Relaxed Normal (RNO) konvex TP-függvény.** A TP-függvény RNO típusú, ha a $w_i(\mathbf{p}(t))$ súlyfüggvények legnagyobb értékére igaz, hogy SN és NN típusú, továbbá ezek az értékek 0 és 1 közé esnek.
- **Inverted Normal (INO) konvex TP-függvény.** A TP-függvény INO típusú, ha a $w_i(\mathbf{p}(t))$ súlyfüggvények legkisebb értéke 0.
- **Inverted Relaxed Normal (IRNO) TP-függvény.** A TP-függvény IRNO típusú, ha a $w_i(\mathbf{p}(t))$ súlyfüggvények INO és RNO típusúak, illetve a legkisebb értékük 0, a legnagyobb értékük pedig megegyezik.

A TP-modell akkor konvex, ha a modell SN és NN típusú egyszerre, tehát az SN és NN feltételek alkalmazásával a TP-modell mindig konvex marad. Természetesen az SN és NN mellett léteznek más konvexitási feltételek is [6].

CNO típusú TP-modell esetén nem minden súlyfüggvény kaphat 1 értéket $\mathbf{p}_i(t) \in [a_i, b_i]$ alapján. Ezen súlyfüggvények maximálisan elérhető értékei közelítik az 1 értéket, míg más súlyfüggvények ugyanabban a dimenzióban kicsi, de nem nulla értékeket vesznek fel. A CNO súlyfüggvény konvexitásához nem muszáj a súlyfüggvények maximális értékeinek azonosnak lenniük, a lényeg, hogy a súlyfüggvények maximum 1, vagy közel 1 értéket vegyenek fel.

A HOSVD alkalmazása után (2.3.2. fejezet) \mathbf{U}_n ortogonális négyzetes mátrix tartalmazza $\mathbf{U}_n = [\mathbf{U}^{(r)} | \mathbf{U}^{(d)}]$, $\mathbf{U}^{(r)}$ megtartott és $\mathbf{U}^{(d)}$ elvetett oszlopait, amelyek n^r , $n^d = n - n^r$ oszlopokat tartalmaznak. A konvexitás feltételeinek beépítése a súlyfüggvényektől függően a következőképpen történhet [6]:

- **SN típusú súlyfüggvény esetén.** \mathbf{T}^{SN} $n^r \times n^r$ transzformációs mátrix kielégíti a

$$\text{sum}(\mathbf{T}^{SN}) = \text{sum}((\mathbf{U}^{(r)})^T), \quad (2.9)$$

feltételt akkor, ha $\text{sum}((\mathbf{U}^{(r)})^T) = (0)_{n(d) \times}$, $n \times n^r$ méretű $\bar{\mathbf{U}}$ mátrix kielégíti SN feltételt;

$$\bar{\mathbf{U}} = \mathbf{U}^{(r)} \mathbf{T}^{SN}. \quad (2.10)$$

Ha $\text{sum}((\mathbf{U}^{(r)})^T) \neq (0)_{n(d) \times}$, $n \times (n^r + 1)$ méretű $\bar{\mathbf{U}}$ mátrix kielégíti SN feltételt;

$$\bar{\mathbf{U}} = [\mathbf{U}^{(r)} | \mathbf{U}^{(d)} \text{sum}((\mathbf{U}^{(d)})^T)] \begin{bmatrix} \mathbf{T}^{SN} & \mathbf{0}_{n^{(r)} \times 1} \\ \mathbf{0}_{1 \times n^{(r)}} & \mathbf{1} \end{bmatrix}, \quad (2.11)$$

akkor

$$\mathbf{T}^{SN} = \text{diag}[\text{sum}(\mathbf{U}^{(r)T})], \quad (2.12)$$

0 elemek esetén pedig

$$\mathbf{T}^{SN} = \mathbf{I}_{n^{(r)} \times n^{(r)}} + [\mathbf{0}_{n^{(r)} \times (\tilde{n}-1)} | \text{sum}(\mathbf{U}^{(r)T}) - \mathbf{1}_{n^{(r)} \times 1} | \mathbf{0}_{n^{(r)} \times (n^{(r)} - \tilde{n})}]. \quad (2.13)$$

Ezután $\bar{\mathbf{U}}$ mátrix SN típusú;

$$\bar{\mathbf{U}} = \mathbf{U}^{(r)} \mathbf{T}^{SN}, \quad (2.14)$$

$$\bar{\mathbf{U}} = [\mathbf{U}^{(r)} | \mathbf{U}^{(d)} \text{sum}(\mathbf{U}^{(r)T})] \begin{bmatrix} \mathbf{T}^{SN} & \mathbf{0}_{n^{(r)} \times 1} \\ \mathbf{0}_{1 \times n^{(r)}} & \mathbf{1} \end{bmatrix}. \quad (2.15)$$

– **NN típusú súlyfüggvény esetén.** \mathbf{T}^{NN} $m \times m$ mátrix

$$\mathbf{T}^{NN} = \frac{1}{n + \zeta_{min}} \begin{bmatrix} 1 + \zeta_{min} & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 + \zeta_{min} & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 + \zeta_{min} \end{bmatrix}, \quad (2.16)$$

ahol ζ_{min} az $\bar{\mathbf{U}}$ minimum elemeit tartalmazza. Ezek alapján az $n \times m$ méretű $\tilde{\mathbf{U}} = \bar{\mathbf{U}} \mathbf{T}^{NN}$ mátrix SN és NN típusú. Ezáltal NN feltétel használata mindig lehetséges egy SN típusú mátrixhoz. Így a TP-modell is SN és NN típusúvá alakítható, ezáltal létrejön a konvex TP-modell.

– **NO típusú súlyfüggvény esetén.** Ebben az esetben \mathbf{T}^{NO} egy invertálható mátrix, amely SN és NN $\tilde{\mathbf{U}}$ mátrixok szorzata; $\hat{\mathbf{U}} = \tilde{\mathbf{U}} \mathbf{T}^{NO}$. Az $n \times m$ méretű $\tilde{\mathbf{U}}$ mátrix SN és NN típusú, amely minden n sora megfelel egy m -dimenziós térben elhelyezkedő pontoknak, ezáltal ezek a pontok egy $(m-1)$ dimenziós hipersíkon helyezkednek el. $\tilde{\mathbf{U}}$ mátrixot jobb oldalról megszorozzuk egy $m \times m$ méretű mátrixszal:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.17)$$

Ha a konvex buroknak m csúcsai vannak, akkor az NO típusú feltétel alkalmazható, ezáltal \mathbf{T}^{NO} az $\tilde{\mathbf{U}}$ mátrix m sorokat tartalmazó inverz mátrixaként értelmezhető.

– **CNO típusú súlyfüggvény esetén.** Amennyiben a konvex burok m -nél több csúcsrendszert tartalmaz, \mathbf{T}^{NO} meghatározása már nem elégíti ki az NO feltételeket. Ebben az esetben m csúcsrendszerekre olyan korlátozást kell bevezetni, amelyek során a csúcsrendszerek nem az $\tilde{\mathbf{U}}$ mátrix n pontjaiból származnak. Ezáltal \mathbf{T}^{NO} a megfelelő m csúcsrendszerekből kerül meghatározásra.

– **RNO típusú súlyfüggvény esetén.** NO állapotot általában nehéz teljes mértékben beépíteni, ezért a CNO, vagy az RNO feltételek beépítése egyszerűbb. SN és NN típusú feltételek beépítése után $\tilde{\mathbf{U}}$ mátrix $n \times m$ méretű. A cél olyan \mathbf{P} mátrix, amely esetén $\hat{\mathbf{U}} \mathbf{P} = \tilde{\mathbf{U}}$. $\hat{\mathbf{U}}$ mátrix RNO típusú lesz és \mathbf{P} mátrix nem négyzetes mátrix, ezáltal nincs inverze. $\tilde{\mathbf{U}}$ mátrix m oszlopokkal $\tilde{\mathbf{U}} = [\tilde{\mathbf{U}}_1 | \tilde{\mathbf{U}}_2 | \cdots | \tilde{\mathbf{U}}_m]$.

Ezután $\tilde{\mathbf{U}}_i$ mátrixhoz egy kiegészítő oszlopot és egy \mathbf{T}_i transzformációs mátrixot kell rendelni ahhoz, hogy a kétoszlopos $\hat{\mathbf{U}}_i$ kielégítse az SN, NN és NO feltételeket: $\hat{\mathbf{U}}_i = [\tilde{\mathbf{U}}_i \quad (1_{n \times 1} - \tilde{\mathbf{U}}_i)] \mathbf{T}_i$, ahol \mathbf{T}_i mátrix $\mathbf{T}_i = \frac{1}{\underline{f}_i - \bar{f}_i} \begin{bmatrix} 1 - \underline{f}_i & \bar{f}_i - 1 \\ -\underline{f}_i & \bar{f}_i \end{bmatrix}$, ahol \underline{f}_i és \bar{f}_i a minimum és maximum értékei $\tilde{\mathbf{U}}_i$ oszlop elemeinek. Ezáltal $\tilde{\mathbf{U}} = \hat{\mathbf{U}}\mathbf{P}$, ahol

$$\hat{\mathbf{U}} = \frac{1}{m}[\hat{\mathbf{U}}_1 | \hat{\mathbf{U}}_2 | \cdots | \hat{\mathbf{U}}_m], \quad (2.18)$$

$$\mathbf{P} = m \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1^{-1} & \mathbf{0}_{2 \times 2} & \cdots & \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{T}_2^{-1} & \cdots & \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 2} & \cdots & \mathbf{T}_m^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.19)$$

- **INO típusú súlyfüggvény esetén.** Az RNO súlyfüggvény esetén a kapott RNO típusú mátrixok oszlopai duplázva vannak. Létezik olyan alternatív módszer, amely nem növeli a kapott mátrix oszlopait, az alkalmazott algoritmusok pedig a parciális algoritmus és a teljes algoritmus.

2.2. A qLPV-modell alapú TP-struktúra

Figyeljük meg a következő folytonos idejű időinvariáns állapotter alakot:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \quad (2.20)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t), \quad (2.21)$$

ahol $\mathbf{x}(t)$ az állapotvektor, $\mathbf{u}(t)$ a bemeneti vektor, $\mathbf{y}(t)$ a kimeneti vektor, amelyek t időfüggők, \mathbf{A} a rendszermátrix, \mathbf{B} a bemeneti mátrix, \mathbf{C} a kimeneti mátrix, \mathbf{D} pedig az átviteli mátrix. A (2.20) és (2.21) egyenleteket átírva qLPV formába a következő állapotter alakot kapom:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(\mathbf{p}(t))\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(\mathbf{p}(t))\mathbf{u}(t), \quad (2.22)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(\mathbf{p}(t))\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(\mathbf{p}(t))\mathbf{u}(t), \quad (2.23)$$

amelyek kifejezhetőek az alábbi módon:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \sum_{i=1}^I w_i(\mathbf{p}(t))(\mathbf{A}_i\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_i\mathbf{u}(t)), \quad (2.24)$$

$$\mathbf{y}(t) = \sum_{i=1}^I w_i(\mathbf{p}(t))(\mathbf{C}_i\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_i\mathbf{u}(t)), \quad (2.25)$$

ahol $\mathbf{A}_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{B}_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $\mathbf{C}_i \in \mathbb{R}^{q \times n}$, $\mathbf{D}_i \in \mathbb{R}^{q \times m}$, $\mathbf{p}(t)$ a paramétervektor és a $w_i(\mathbf{p}(t))$ súlyfüggvény időben változó.

A TP transzformáció elvégzéséhez szükséges a következő qLPV állapotter alak meghatározása [6]:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \mathbf{y}(t) \end{bmatrix} = \mathbf{S}(\mathbf{p}(t)) \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{u}(t) \end{bmatrix}, \quad (2.26)$$

ahol $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ és $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^q$. $\mathbf{S}(\mathbf{p}(t))$ pedig a rendszermátrix, ami a $\mathbf{p} = \mathbf{p}(t) \in \Omega$ N dimenziós paramétervektorokat tartalmazza egy Ω zárt hiper-kockán belül, ahol $\Omega = [\omega_1^{\min}, \omega_1^{\max}] \times [\omega_2^{\min}, \omega_2^{\max}] \times \dots \times [\omega_N^{\min}, \omega_N^{\max}] \subset \mathbb{R}^N$. Ez alapján a rendszermátrix felírható

$$\mathbf{S}(\mathbf{p}(t)) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}(\mathbf{p}(t)) & \mathbf{B}(\mathbf{p}(t)) \\ \mathbf{C}(\mathbf{p}(t)) & \mathbf{D}(\mathbf{p}(t)) \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

alakban, amely változó paramétereket tartalmaz. Ha $\mathbf{p}(t)$ nem tartalmazza $\mathbf{x}(t)$ elemeit, akkor az LPV rendszer. Ha $\mathbf{p}(t)$ tartalmazza $\mathbf{x}(t)$ bármely elemét, vagy elemeit, ebben az esetben a nemlineáris modellek osztályába tartozik, tehát qLPV rendszer, amely megőrzi az eredeti rendszer nemlineáris tulajdonságait.

$\mathbf{S}(\mathbf{p}(t))$ rendszermátrix meghatározható az alábbi alakban:

$$\mathbf{S}(\mathbf{p}(t)) = \sum_{i=1}^I w_i(\mathbf{p}(t)) \mathbf{S}_i, \quad (2.28)$$

azaz $\mathbf{S}(\mathbf{p}(t))$ megadható az \mathbf{S}_i LTI vagy csúcsrendszerek paraméterfüggő lineáris konvex kombinációjaként [6], amely a következő reprezentációval írható le:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} = \left[\sum_{i=1}^I w_i(\mathbf{p}(t)) \mathbf{S}_i \right] \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix}. \quad (2.29)$$

A kutatásom során a TP-modell alapú transzformációt használom a különböző nemlineáris, parametrikus, dinamikus rendszerek vizsgálatához állapotter alakban, azonban érdemes megjegyezni, hogy a TP-modelltranszformáció az általános többcsatornás rendszerekre is alkalmazható a következő formában [6]:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \mathbf{z}_1(t) \\ \vdots \\ \mathbf{z}_q(t) \\ \mathbf{y}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}(\mathbf{p}(t)) & \mathbf{B}_1(\mathbf{p}(t)) & \cdots & \mathbf{B}_q(\mathbf{p}(t)) & \mathbf{B}(\mathbf{p}(t)) \\ \mathbf{C}_1(\mathbf{p}(t)) & \mathbf{D}_{1,1}(\mathbf{p}(t)) & \cdots & \mathbf{D}_{1,q}(\mathbf{p}(t)) & \mathbf{E}_1(\mathbf{p}(t)) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{C}_q(\mathbf{p}(t)) & \mathbf{D}_{q,1}(\mathbf{p}(t)) & \cdots & \mathbf{D}_{q,q}(\mathbf{p}(t)) & \mathbf{E}_q(\mathbf{p}(t)) \\ \mathbf{C}(\mathbf{p}(t)) & \mathbf{F}_1(\mathbf{p}(t)) & \cdots & \mathbf{F}_q(\mathbf{p}(t)) & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{w}_1(t) \\ \vdots \\ \mathbf{w}_q(t) \\ \mathbf{u}(t) \end{bmatrix}, \quad (2.30)$$

ahol a rendszermátrix elemei $\mathbf{p}(t)$ -től függenek, $\mathbf{w}_j(t) \rightarrow \mathbf{z}_j(t)$ azok a csatornák, amelyek robusztusságtól, vagy teljesítőképesség céloktól függenek.

2.2.1. Definíció. *A véges elemű politóp TP-modell.* A véges elemű politóp TP-modell leírása a következő:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \mathbf{y}(t) \end{bmatrix} = \mathcal{S} \boxtimes_{n \in N} w_n(p_n(t)) \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{u}(t) \end{bmatrix}, \quad (2.31)$$

ahol az $n + 2$ dimenziós tenzormag $\mathcal{S} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_N \times O \times I}$ az $\mathbf{S}_{i_1, i_2, \dots, i_N} \in \mathbb{R}^{O \times I}$ LTI rendszermátrixokból épül fel.

Ha a súlyfüggvények az LTI rendszerek konvex kombinációját alkotják, akkor a TP-modell felírása a következő:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \mathbf{y}(t) \end{bmatrix} = \mathcal{S} \boxtimes_{n \in N} w_n^{Co}(p_n(t)) \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{u}(t) \end{bmatrix}, \quad (2.32)$$

így a TP-modell a politopikus reprezentációt tartalmazza. $\mathbf{S}(\mathbf{p}(t))$ rendszermátrix mindig $Co\{\forall n, i_n : \mathbf{S}_{i_1, i_2, \dots, i_N}\}$ belül van, ahol $\mathbf{S}_{i_1, i_2, \dots, i_N}$ az LTI rendszerekre utal, Co a konvexitást jelöli. A TP-modell egy magasabb struktúrájú politopikus reprezentáció, amely a következőképpen írható fel:

$$\mathbf{S}(\mathbf{p}(t)) = \sum_{i=1}^I w_i^{Co}(\mathbf{p}(t)) \mathbf{S}_i, \quad (2.33)$$

ahol \mathbf{S}_i egyenlő az \mathcal{S} tenzorban tárolt csúcsrendszerekkel. A konvex politopikus TP-modell előnyéhez tartozik, hogy az LMI-alapú módszer az irányításelméletben könnyen alkalmazható a TP-modellre.

2.2.2. Definíció. *Az NN típusú TP-modell.* A TP-modell NN típusú, ha a súlyfüggvényei kielégítik az alábbi feltételt minden $\mathbf{p} \in \Omega$ esetén:

$$\forall n, i, p_n : w_{n,i}(p_n) \geq 0. \quad (2.34)$$

2.2.3. Definíció. *Az SN típusú TP-modell.* A TP-modell SN típusú, ha a súlyfüggvényei kielégítik az alábbi feltételt, minden $\mathbf{p} \in \Omega$ esetén:

$$\forall n, p_n : \sum_{i_n=1}^{I_n} w_{n,i_n}(p_n) = 1. \quad (2.35)$$

Az SN és NN feltételek együttes teljesülése kielégíti a következő feltételt:

$$\forall n, i, p_n : w_{n,i}(p_n) \in [0, 1], \quad (2.36)$$

$$\forall n, p_n : \sum_{i=1}^{I_n} w_{n,i}(p_n) = 1. \quad (2.37)$$

A (2.36) kifejezés a (2.7) feltételből következik, illetve (2.37) következik a (2.8) feltételből:

$$\sum_{i=1}^I w_h(\mathbf{p}) = \sum_{i_1=1}^{I_1} \sum_{i_2=1}^{I_2} \cdots \sum_{i_N=1}^{I_N} \prod_{n=1}^N w_{n,i_n}(p_n) = \prod_{n=1}^N \left(\sum_{i_n=1}^{I_n} w_{n,i_n}(p_n) \right) = 1, \quad (2.38)$$

ahol $w_i(\mathbf{p}) = w_{1,i_1}(p_1)w_{2,i_2}(p_2) \cdots w_{N,i_N}(p_N)$. Azonban ez fordítva nem igaz. Az NN és SN típusú TP-modell $\mathbf{S}(\mathbf{p})$ rendszermátrixszja egy olyan politópon belül helyezkedik el, amelyet a TP-struktúra LTI rendszerének $\mathbf{S}_{i_1, i_2, \dots, i_N}$ csúcsrendszerei határoznak meg, minden $\mathbf{p} \in \Omega$ esetén.

2.2.4. Definíció. *A konvex TP-modell.* A TP-modell konvex, ha SN és NN típusú.

A konvex TP-modell egyik példája a TS-fuzzy modell, amelynek leírása a következő:

$$\text{HA } p_1 \in A_{1,i_1} \text{ ÉS } p_2 \in A_{2,i_2} \text{ ÉS } \dots \text{ ÉS } p_N \in A_{N,i_N}, \text{ AKKOR } \mathbf{S}_{i_1,i_2,\dots,i_N}, \quad (2.39)$$

ahol $n = 1, \dots, N$, $i_n = 1, \dots, I_n$. Ebben az esetben a fuzzy változók a p_n -ek, amelyek a \mathbf{p} paramétert alkotják. A p_n fuzzy változónak az A_{n,i_n} antecedens tagsági függvényei határozzák meg a $w_{n,i_n}(p_n)$ súlyfüggvényeket. A fuzzy szabály konzekvense pedig az LTI rendszermátrix $\mathbf{S}_{i_1,i_2,\dots,i_N}$ elemeit határozza meg. A TS-fuzzy modell kimenete a szorzatösszeg-súlyközéppont következtetés mellett a (2.32) által az SN és NN feltételeket kielégíti.

A TP-modell mindig konvex TP-modell (2.1.2. fejezet), mert az SN és NN típusok a TP-modellek alapvető konvexitásai. Az SN és NN mellett léteznek más konvexitási feltételek is, amelyeket egy adott TP-modellhez be lehet építeni. A különböző konvexitási feltételek beépítése a TP-modellbe a rendszermátrixot körülvevő politóp alakjának változtatását, vagy konvex burok változtatását jelenti. Ez pedig számos előnyt biztosít az LMI módszeren alapuló szabályozó tervezésében.

2.2.5. Definíció. *Az egzakt TP-modell.* A TP-modell egzakt modell minden $\mathbf{p} \in \Omega$ esetén, ha

$$\mathbf{S}(\mathbf{p}) = \mathcal{S} \boxtimes_{n=1}^N w_n(p_n). \quad (2.40)$$

2.2.6. Definíció. *Nem egzakt TP-modell.* Ebben az esetben $\hat{\mathbf{S}}(\mathbf{p})$ az $\mathbf{S}(\mathbf{p})$ rendszermátrix közelítése:

$$\hat{\mathbf{S}}(\mathbf{p}) \approx \mathcal{S} \boxtimes_{n=1}^N w_n(p_n), \quad (2.41)$$

ahol a közelítés hibája γ a következő:

$$\max_{\mathbf{p}} \left\| \mathbf{S}(\mathbf{p}) - \hat{\mathbf{S}}(\mathbf{p}) \right\|_{\mathcal{L}_2} = \gamma. \quad (2.42)$$

2.3. Tenzorszorzat alapú modelltranszformáció

Ebben a fejezetben a TP-modelltranszformációt és lépéseit mutatom be, amelyek szükségesek a kutatás elvégzéséhez.

2.3.1. A PDC keretrendszer

A PDC keretrendszert 1995-ben használták a TS-fuzzy modellekhez, aminek a segítségével a TS-fuzzy modellhez fuzzy szabályozó tervezését javasolták [7]. Tehát a PDC jelentősen megkönnyíti az irányítástechnikában használt szabályozók tervezését. Az LMI optimalizálás és a PDC keretrendszer együttes alkalmazása a konvex optimalizálást teszi lehetővé. A PDC tervezési struktúrát az LTI visszacsatoló \mathbf{F} erősítés határozza meg minden LTI csúcsrendszerre. A PDC keretrendszerben történő LMI stabilitási feltételek leírása a 3.5. fejezetben található.

Számos módszer létezik az \mathbf{F} visszacsatoló erősítés meghatározására. Ha a csúcsrendszerek LTI rendszerek, akkor a manapság használatos irányítástechnikai lineáris szabályozótervezési módszerekkel meglehetősen határozni az erősítést, például LQ-szabályozással, pólusáthelyezéssel stb. Az LMI által megfogalmazott stabilitási feltételek többféle célkitűzés szerint választhatók, mint például a kvadratikus vagy az aszimptotikus stabilitás, a csillapodási sebesség szabályozása, vagy az állapotvektorra, kimenetekre és bemenetekre megfogalmazott különböző korlátozások [7]. Az állapotvisszacsatoló a következőképpen írható fel:

$$\mathbf{u}(t) = - \left(\mathcal{F} \boxtimes_{n=1}^N \mathbf{w}_n(p_n(t)) \right) \mathbf{x}(t), \quad (2.43)$$

ahol az \mathcal{F} tenzorban tárolt LTI visszacsatoló erősítések jelölése $\mathbf{F}_{i_1, i_2, \dots, i_N}$.

2.3.2. A HOSVD módszer

A qLPV állapottér modell analitikus átalakítása TP-modell formába meglehetősen hosszú és bonyolult folyamat, feltéve ha megvalósítható. Ezért a HOSVD módszeren alapuló számítási eljárás alkalmazását javasolták [6] [56], amellyel numerikusan lehet átalakítani a qLPV-modelleket TP-alapú modellé.

2.3.1. Definíció. *Skalár szorzat.* Két $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_N}$ tenzor skalár szorzata kifejezhető:

$$\langle \mathcal{A}, \mathcal{B} \rangle = \sum_{i_1=1}^{I_1} \sum_{i_2=1}^{I_2} \dots \sum_{i_N=1}^{I_N} a_{i_1, i_2, \dots, i_N} b_{i_1, i_2, \dots, i_N}. \quad (2.44)$$

2.3.2. Definíció. *Ortogonalitás.* A tenzorok ortogonálisak, ha a skaláris szorzatuk 0.

2.3.3. Definíció. *Frobenius-norma.* \mathcal{A} tenzor Frobenius-normája:

$$\| \mathcal{A} \| = \sqrt{\langle \mathcal{A}, \mathcal{A} \rangle}. \quad (2.45)$$

2.3.4. Definíció. *\mathcal{A} tenzor n -módú rangja.* $R_n = \text{rank}_n(\mathcal{A})$ az \mathcal{A} tenzor n -módú mátrixa által behatárolt vektortér dimenziója. A $\text{rank}_n(\mathcal{A})$ könnyen meghatározható $\mathbf{A}_{(n)}$ mátrix n -módú rangjával; $\text{rank}_n(\mathcal{A}) = \text{rank}_n(\mathbf{A}_{(n)})$.

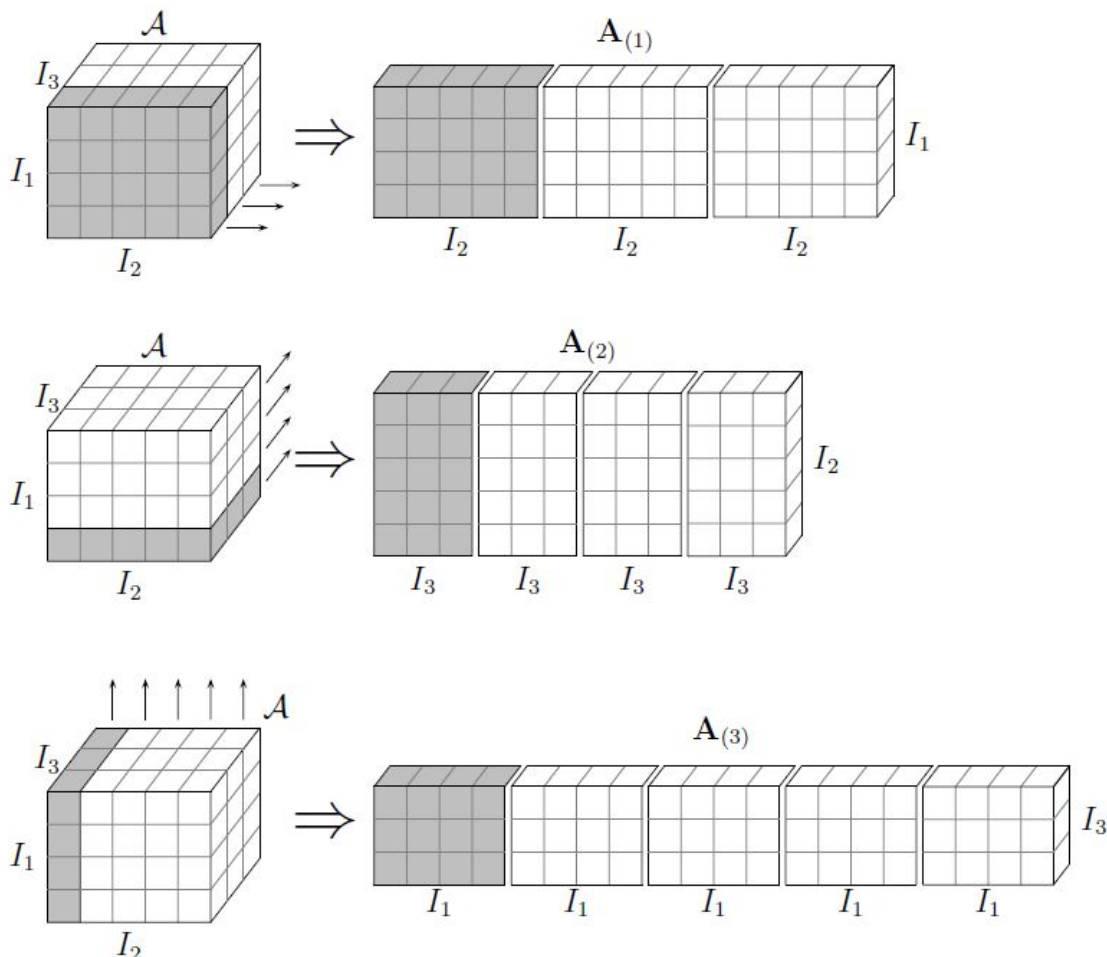
2.3.5. Definíció. *n -módú \mathbf{U}_n szinguláris mátrix és szinguláris értékek.* \mathbf{U}_n közvetlenül megtalálható, mint a bal oldali szinguláris mátrix (és szinguláris értékei) \mathcal{A} tenzor n -módú mátrixa, (2.1. ábra). Ezáltal egy N -ed rendű tenzor HOSVD-jének kiszámítása az $I_n \times I_1 I_2 \dots I_{n-1} I_{n+1} \dots I_N$ méretű mátrixok N különböző mátrix SVD-jének kiszámításához vezet:

$$\mathbf{A}_{(n)} = \mathbf{U}_{(n)} \mathbf{\Theta}_{(n)} \mathbf{V}_{(n)}^T, \quad (2.46)$$

ahol $n = 1, \dots, N$. \mathcal{S} magtenzor meghatározása:

$$\mathcal{S} = \mathcal{A} \times_1 \mathbf{U}_1^T \times_2 \mathbf{U}_2^T \times_3 \dots \times_N \mathbf{U}_N^T = \mathcal{A} \boxtimes_{n=1}^N \mathbf{U}_n^T. \quad (2.47)$$

A TP-modelltranszformáció magában foglalja a qLPV-modell diszkrétizációját [6], a HOSVD használata során megkapjuk az egyedi TP-szerkezetét az adott qLPV-modellnek. Tehát a TP-modelltranszformáció lényegében a qLPV-modell magasabb rendű szinguláris értékekre történő felbontásának tekinthető.



2.1. ábra. Egy harmadrendű \mathcal{A} tenzor 3-módú mátrixai [6]

- **SVD**. Mátrix szinguláris értékekre történő felbontása. Minden valós $(\mathbf{I}_1 \times \mathbf{I}_2)$ \mathbf{A} mátrix kifejezhető a következő szorzattal [6] [16]:

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}_1 \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{U}_2^T = \mathbf{S} \times_1 \mathbf{U}_1 \times_2 \mathbf{U}_2 = \mathbf{S} \boxtimes_{n=1}^2 \mathbf{U}_n, \quad (2.48)$$

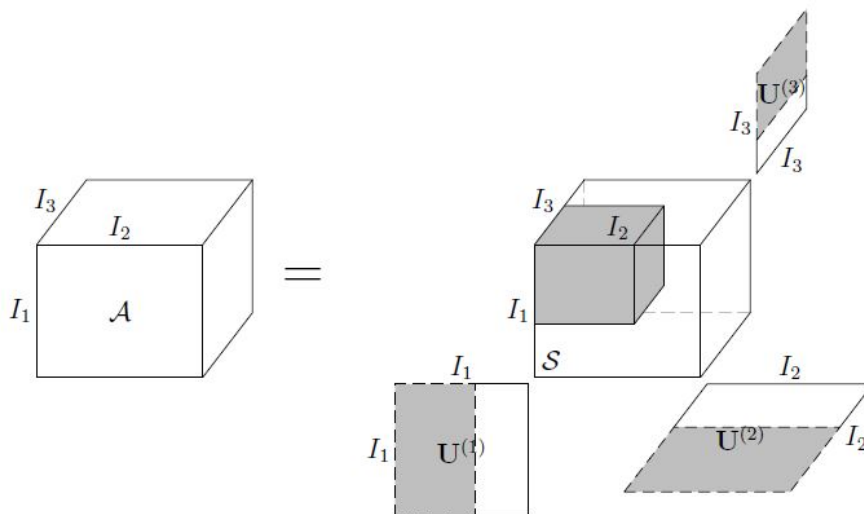
ahol $\mathbf{U}_1 = (\mathbf{u}_{1,1} \mathbf{u}_{1,2} \cdots \mathbf{u}_{1,I_1})$ egy ortonormált $(\mathbf{I}_1 \times \mathbf{I}_1)$ mátrix, $\mathbf{U}_2 = (\mathbf{u}_{2,1} \mathbf{u}_{2,2} \cdots \mathbf{u}_{2,I_2})$ egy ortonormált $(\mathbf{I}_2 \times \mathbf{I}_2)$ mátrix. \mathbf{S} egy $(\mathbf{I}_1 \times \mathbf{I}_2)$ mátrix az alábbi tulajdonságokkal:

1. pseudo-diagonalitás:

$$\mathbf{S} = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_{\min(I_1, I_2)}), \quad (2.49)$$

2. elrendezés:

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_{\min(I_1, I_2)} \geq 0, \quad (2.50)$$



2.2. ábra. Egy harmadrendű tenzor HOSVD felbontása [6]

ahol σ_i jelöli az \mathbf{A} mátrix szinguláris értékeit, $\mathbf{u}_{1,i}$ és $\mathbf{u}_{2,i}$ vektorok pedig az i -edik bal és i -edik jobb szinguláris vektorok. σ_i nem nulla szinguláris értékek száma megegyezik az \mathbf{A} mátrix rangjával. Az SVD egyértelműen meghatározza \mathbf{S} , \mathbf{U}_1 és \mathbf{U}_2 mátrixokat az előjelek mértékéig, amennyiben nincsenek egyenértékű szinguláris értékek ($\sigma_i \neq \sigma_{i+1}$). \mathbf{U}_1 és \mathbf{U}_2 mátrixok meghatározása nem feltétlenül egyértelmű, ha vannak egyenértékű szinguláris értékek ($\sigma_i = \sigma_{i+1}$). \mathbf{A} mátrix szinguláris értékei Frobenius-normát határoznak meg:

$$\|\mathbf{A}\| = \sum_{i=1}^{\min(I_1, I_2)} \sqrt{\sigma_i^2}. \quad (2.51)$$

- **HOSVD.** Mátrix magasabb rendű szinguláris értékekre történő felbontása. Minden valós $(\mathbf{I}_1 \times \mathbf{I}_2 \times \cdots \times \mathbf{I}_N)$ \mathcal{A} tenzor kifejezhető a következő szorzattal:

$$\mathcal{A} = \mathcal{S} \times_1 \mathbf{U}_1 \times_2 \mathbf{U}_2 \times_3 \cdots \times_N \mathbf{U}_N = \mathcal{S} \boxtimes_{n=1}^N \mathbf{U}_n, \quad (2.52)$$

ahol $\mathbf{U}_n = (\mathbf{u}_{n,1} \mathbf{u}_{n,2} \cdots \mathbf{u}_{n,I_n})$, $n = 1, \dots, N$ egy ortonormált $(\mathbf{I}_n \times \mathbf{I}_n)$ mátrix, \mathcal{S} egy valós $(\mathbf{I}_1 \times \mathbf{I}_2 \times \cdots \times \mathbf{I}_N)$ tenzor, amely $\mathcal{S}_{i_n=\alpha}$ altenzorokkal rendelkezik. A HOSVD alkalmazására példa a 2.2. ábrán látható. \mathcal{S} tulajdonságai a következők:

1. mindenkori ortogonalitás: két $\mathcal{S}_{i_n=\alpha}$, $\mathcal{S}_{i_n=\beta}$ altenzor ortogonális minden lehetséges n , α, β értékre, $\alpha \neq \beta$

$$\langle \mathcal{S}_{i_n=\alpha}, \mathcal{S}_{i_n=\beta} \rangle = 0, \quad (2.53)$$

2. elrendezés:

$$\|\mathcal{S}_{i_n=1}\| \geq \|\mathcal{S}_{i_n=2}\| \geq \cdots \geq \|\mathcal{S}_{i_n=n}\| \geq 0, \quad (2.54)$$

ahol $\|\mathcal{S}_{i_n=i}\|$ a Frobenius-norma; $\sigma_i^{(n)}$ az n -módú szinguláris értékei \mathcal{A} tenzornak. \mathbf{U}_n az n -módú szinguláris mátrix, $\mathbf{u}_{n,i}$ az i -edik n -módú szinguláris vektorok.

- **CHOSVD.** A HOSVD kiszámítása az SVD végrehajtásával minden n -módú \mathcal{A} mátrixára, $n = 1, \dots, N$. Ha a nulla szinguláris értékeket és a $\mathbf{u}_{R_n+1,n}, \mathbf{u}_{R_n+2,n}, \dots, \mathbf{u}_{I_n,n}$; $R_n = \text{rank}_n(\mathcal{A})$ kapcsolódó szinguláris vektorokat elhanyagoljuk, akkor a HOSVD minimalizált struktúráját kapjuk:

$$\mathcal{A} = \mathcal{D} \boxtimes_{n=1}^N \mathbf{U}_n, \quad (2.55)$$

ahol \mathbf{U}_n és \mathcal{D} méretei; $I_n \times R_n$ és $R_1 \times \dots \times R_N$, $R_n \leq I_n$.

- **RHOSVD.** Ha elhanyagoljuk a nem nulla szinguláris értékeket és a kapcsolódó szinguláris vektorokat a HOSVD-ben, az az \mathcal{A} tenzor közelítést eredményezi a következő tulajdonsággal: $\mathcal{A} = \mathcal{S} \boxtimes_{n=1}^N \mathbf{U}_n$, $R_n, n = 1, \dots, N$, a $\sigma_{R'_n+1}^{(n)}, \sigma_{R'_n+2}^{(n)}, \dots, \sigma_{R_n}^{(n)}$ nem nulla szinguláris értékek elhagyásával, $R'_n < R_n$:

$$\hat{\mathcal{A}} = \mathcal{D} \boxtimes_{n=1}^N \mathbf{U}_n, \quad (2.56)$$

ahol \mathbf{U}_n és \mathcal{D} méretei; $I_n \times R'_n$ és $R'_1 \times \dots \times R'_N$. Ebben az esetben \mathcal{A} és \mathcal{A}' közötti különbség kifejezhető:

$$\gamma = \|\mathcal{A} - \hat{\mathcal{A}}\|^2 \leq \sum_{i_1=R'_1+1}^{R_1} \left(\sigma_{i_1}^{(1)}\right)^2 + \sum_{i_2=R'_2+1}^{R_2} \left(\sigma_{i_2}^{(2)}\right)^2 + \dots + \sum_{i_N=R'_N+1}^{R_N} \left(\sigma_{i_N}^{(N)}\right)^2. \quad (2.57)$$

2.3.3. A TP-modell alapú transzformáció és lépései

Egy TP-modell alkalmas bizonyos mérnöki problémák hatékony megoldására, ugyanis a transzformáció képes egy dinamikus rendszermodell átalakítására. A modern politopikus és LMI-alapú irányításelméleti módszerek alapvetően közvetlenül alkalmazhatók a TP-modellekre.

A TP transzformáció jellemzői [1–4, 6, 15–17, 171]:

- A TP-modelltranszformáció a kiindulási modell formájától függetlenül elvégezhető, amely lehet neurális hálózat, fuzzy logika stb. Az egyetlen követelmény az, hogy a modell diszkretizálható legyen egy M mintavételi rácson.
- Ha a TP-modell alapú reprezentáció létezik, akkor a transzformáció az adott modell pontos TP-modelljét generálja. Ha a TP-modell reprezentáció nem létezik, akkor egy, a modell közelítő ábrázolását lehet származtatni.
- A TP-modelltranszformáció numerikusan építi fel egy adott qLPV-modell HOSVD alapú TP-modell szerkezetét a következő tulajdonságokkal:
 - A többváltozós folytonos függvények ortonormált egyváltozós súlyfüggvény rendszerekből álló szorzatokat eredményeznek.
 - Az LTI csúcsrendszerek, amelyek meghatározzák az alapvető struktúrát, minimalizálva vannak.
 - Az LTI csúcsrendszerek ortogonális alaprendszerbe épülnek.
 - Az csúcsrendszerek és a súlyfüggvény rendszerek az egyes komponensek jelentőségének megfelelő magasabb rendű rangsorba kerülnek.

- A TP-modelltranszformáció képes különböző konvex TP-modell reprezentációkat létrehozni: egy adott modell különböző politopikus reprezentációit is. A politopikus reprezentáció struktúráját tekintve közvetlenül végrehajtható az LMI-alapú szabályozó tervezési módszere.
- A TP-modellek átalakítása az LMI-alapú stabilizálás alkalmazása előtt történik. Tehát az LMI alkalmazása előtt a szükséges súlyfüggvényeknek már léteznie kell, illetve a szabályozás során nem kell meghatározni az LTI rendszerek helyi súlyozását a visszacsatolási erősítésekhez.

A következő lépések segítségével az adott qLPV-modellt könnyedén TP-modell formára lehet transzformálni [6]:

1. **Diszkretizáció.** Ez a lépés az $\mathbf{S}(\mathbf{p}(t))$ paraméterfüggő rendszer-mátrixot alakítja át numerikus úton tenzor reprezentációvá. A TP-modell kizárólag az Ω transzformációs térben értelmezhető. A cél egy adott függvény $\mathcal{F}^{D(\Omega, M)}$ diszkretizált tenzor reprezentációja. Elsőként Ω meghatározására, azután M hiper-kocka diszkretizációs rács definiálására kerül sor.

2.3.6. Definíció. Ω *transzformációs tér.* Ω egy korlátos hiper-kocka, ahol a rendszer-mátrix paraméter vektorai $\mathbf{p} \in \Omega : [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_N, b_N]$. Ω meghatározása a p paramétertér fizikai modellje alapján történik. A TP-modell súlyfüggvényei az $[a_n, b_n], n = 1, \dots, N$ intervallumon belül értelmezendők.

2.3.7. Definíció. M *diszkretizációs rács.* M jelöli a hiper-kocka diszkretizációs rácsot, amely Ω transzformációs térben értelmezendő. M_n jelöli az n -edik dimenzióban lévő rácsvonalak számát, $n = 1, \dots, N$, $a_n \leq g_{n, m_n} \leq b_n$, $m_n = 1, \dots, M_n$. A rácsvonalak tetszőlegesen elhelyezhetők az intervallumokban, azonban érdemes ekvidisztáns felosztást használni; $g_{n, m_n} = a_n + \frac{b_n - a_n}{M_n - 1}(m_n - 1)$. Az Ω -ban lévő rácspontokat a koordináta vektor határozza meg:

$$g_{m_1, m_2, \dots, m_N} = \begin{bmatrix} g_{1, m_1} \\ \vdots \\ g_{N, m_N} \end{bmatrix}. \quad (2.58)$$

Minél sűrűbb a diszkretizációs rács, annál pontosabban írja le a diszkretizált tenzor a függvényt Ω -ban. A kiválasztott diszkretizációs rácspontok számát két szempontból lehet vizsgálni:

- A függvény kanonikus formájának megtalálása szempontjából. Ehhez növelni kell a rácspontok számát, amíg a HOSVD rangja nem növekszik.
- A súlyozási függvények finomítása szempontjából. A súlyozási függvények pontjainak száma növelhető, miután a HOSVD, így a mintavételi rácspontok száma nem befolyásolja közvetlenül ezt a lehetőséget.

2.3.8. Definíció. Adott függvény diszkrétizált alakja. $\mathcal{F}^{D(\Omega, M)}$ tenzor $y = f(x)$ függvény diszkrétizált alakját határozza meg az Ω transzformációs térben M rács diszkrétizációja felett. D jelöli a diszkrétizált alakot. Az $y = f(x)$ függvény minden rácsponton értelmezve van az Ω térben:

$$h_{m_1, \dots, m_N}^{D(\Omega, M)} = f(g_{m_1, \dots, m_N}). \quad (2.59)$$

Ha $y = f(x)$ egy TP-függvény, $\mathcal{F}^{D(\Omega, M)}$ egyszerűen megadható a súlyfüggvények diszkrétizálásával:

$$y = f(x) = \mathcal{B} \boxtimes_{n=1}^N \mathbf{w}_n(x_n), \quad (2.60)$$

akkor a diszkrétizációs alak:

$$\mathcal{F}^{D(\Omega, M)} = \mathcal{B} \boxtimes_{n=1}^N \mathbf{w}_n^{D(\Omega, M)}, \quad (2.61)$$

ahol $\mathbf{w}_n^{D(\Omega, M)}$ a diszkrétizált súlyfüggvények:

$$\mathbf{w}_n^{D(\Omega, M)} = [\mathbf{w}_{n,1}^{D(\Omega, M)}, \mathbf{w}_{n,2}^{D(\Omega, M)}, \dots, \mathbf{w}_{n,N}^{D(\Omega, M)}], \quad (2.62)$$

ahol $\mathbf{w}_{n,1}^{D(\Omega, M)}$ a $\mathbf{w}_{n,1}(x_n)$ függvény diszkrétizált oszlopa:

$$\mathbf{w}_{n,1}^{D(\Omega, M)} = \mathbf{w}_{n,1}^{D([a_n, b_n], M_n)}. \quad (2.63)$$

Mátrixalakban írva:

$$\mathbf{W}_n^{D(\Omega, M)} = \begin{bmatrix} w_{n,1}(g_{n,1}) & w_{n,2}(g_{n,1}) & \cdots & w_{n,r_n}(g_{n,1}) \\ w_{n,1}(g_{n,2}) & w_{n,2}(g_{n,2}) & \cdots & w_{n,r_n}(g_{n,2}) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ w_{n,1}(g_{n,M_n}) & w_{n,2}(g_{n,M_n}) & \cdots & w_{n,r_n}(g_{n,M_n}) \end{bmatrix}. \quad (2.64)$$

2.3.9. Definíció. A $qLPV$ -modell diszkrétizációja. \mathcal{S}^D jelöli a diszkrétizált $\mathbf{S}(\mathbf{p}) \in \mathbb{R}^{(m+k) \times (m+l)}$ rendszermátrixot M hiper-kocka rácson Ω transzformációs térben. \mathcal{S}^D elemei:

$$\mathcal{S}_{m_1, m_2, \dots, m_N} = \mathbf{S}(g_{m_1, m_2, \dots, m_N}), \quad (2.65)$$

$m_n = 1, \dots, M_n$, $n = 1, \dots, N$. Így \mathcal{S}^D mérete $M_1 \times M_2 \times \dots \times M_N \times (m+k) \times (m+l)$.

A rács sűrűségének választása a diszkrétizációhoz tetszőleges, azonban fontos, hogy minél pontosabban írja le a diszkrétizált tenzor a rendszermátrixot Ω -ban:

$$\mathcal{S}^D = \mathcal{S} \boxtimes_{n=1}^N w_n^D(p_n), \quad (2.66)$$

ahol $w_n^D(p_n)$ a $w_n(p_n)$ súlyfüggvények értékei az $[a_n, b_n]$ n dimenziós intervallumon, illetve $p_n = g_{n, m_n}$, $m_n = 1, \dots, M_n$.

2. **A diszkretizált TP-függvény előállítás: HOSVD alkalmazása.** Ennek a lépésnek a célja az adott függvény TP-szerkezetének meghatározása. A függvény TP-struktúrájának megtalálására a HOSVD módszert alkalmazom. A HOSVD végrehajtása a diszkretizált \mathcal{S}^D rendszer tenzoron, amely csak az első N dimenzióra érvényes:

$$\mathcal{S}^D = \mathcal{S} \boxtimes_{n=1}^N \mathbf{U}_n. \quad (2.67)$$

I_n jelölje a szinguláris értékek és vektorok számát az egyes dimenziókban. Ezáltal \mathcal{S} mérete $I_1 \times I_2 \times \dots \times I_N \times (m+k) \times (m+l)$, \mathbf{U}_n mérete pedig $M_n \times I_n$. CHOSVD alkalmazása esetén $I_n = R_n = \text{rank}_n(\mathcal{S}^D)$. RHOSVD alkalmazása esetén $I_n < R_n$. Ezután $I_n \leq M_n$ és \mathcal{S} tenzor tartalmazza $(m+k) \times (m+l)$ $\mathbf{S}_{i_1, i_2, \dots, i_N}$ mátrixokat és $i_n = 1, \dots, I_n$ elemeket.

$\mathcal{F}^{D(\Omega, M)}$ tenzor CHOSVD eredményeként:

$$\mathcal{F}^{D(\Omega, M)} = \mathcal{S} \boxtimes_{n=1}^N \mathbf{U}_n = \mathcal{S} \boxtimes_{n=1}^N \mathbf{w}_{n, N}^{D(\Omega, M)}, \quad (2.68)$$

ahol $\mathbf{U}_n = \mathbf{w}_{n, N}^{D(\Omega, M)}$. \mathbf{T}_n mátrix transzformációt szinguláris mátrixokká lehet alakítani:

$$\bar{\mathbf{U}}_n' \mathbf{T}_n = \mathbf{U}_n, \quad (2.69)$$

ezáltal $\mathcal{S}^D =$ kifejezhető a következőképpen:

$$\mathcal{S}^D = \mathcal{S} \boxtimes_{n=1}^N \mathbf{U}_n = \mathcal{S} \boxtimes_{n=1}^N (\bar{\mathbf{U}}_n' \mathbf{T}_n) = \mathcal{S} \boxtimes_{n=1}^N \mathbf{T}_n \boxtimes_{n=1}^N \bar{\mathbf{U}}_n = \bar{\mathcal{S}} \boxtimes_{n=1}^N \bar{\mathbf{U}}_n, \quad (2.70)$$

ahol

$$\bar{\mathcal{S}} = \mathcal{S} \boxtimes_{n=1}^N \mathbf{T}_n. \quad (2.71)$$

3. **A TP-függvény újraképezése: súlyfüggvények meghatározása.** A TP-modelltranszformáció harmadik kulcsfontosságú lépése a súlyfüggvények meghatározása [6] [4]. A súlyfüggvények az $[a_n, b_n]$ intervallum bármely pontján meghatározhatók $y = f(x)$ segítségével:

- I_n a súlyfüggvények száma n dimenzió mentén, $n = 1, \dots, N$.
- $(m+k) \times (m+l)$ mátrixok $\mathbf{S}_{i_1, i_2, \dots, i_N} = 1, \dots, I_n$, mint LTI rendszerek.
- $\mathbf{U}_n \in \mathbb{R}^{M_n \times I_n}$, mint $\mathbf{w}_n^D(p_n)$, azaz n dimenziós súlyfüggvények, mint diszkretizált p_n értékek $[a_n, b_n]$ intervallumon belül. Az \mathbf{U} mátrix i_n -edik \mathbf{u}_{n, i_n} oszlopvektora határozza meg a $\mathbf{w}_n^D(p_n)$ i_n -edik $w_{n, i_n}(p_n)$ oszlopvektorát, diszkretizálva $a_n \leq g_{n, m_n} \leq b_n$, $m_n = 1, \dots, M_n$. Az \mathbf{u}_{n, i_n} vektor m_n -edik eleme ($\mathbf{u}_{n, i_n}(m_n)$) határozza meg az i_n -edik $w_{n, i_n}(p_n)$ súlyfüggvény értékét a $p_n = g_{n, m_n}$ pontban:

$$w_{n, i_n}(g_{n, m_n}) = u_{n, i_n}(m_n). \quad (2.72)$$

A fenti súlyfüggvények csak a g_{n, m_n} diszkretizált rácsvonalakon állíthatók elő az n -edik dimenzióban az $[a_n, b_n]$ intervallumon. A súlyfüggvényeket kétféleképpen lehet rekonstruálni [6]:

- Az első módszer: lineáris interpoláció alkalmazása \mathbf{U} mátrix oszlopainak elemei között, így minden oszlop egy szakaszonként definiált lineáris súlyfüggvényt határoz meg. Ezt nevezzük bilineáris TP-modelltranszformációnak.

- A második módszer: a súlyfüggvények újraszámítása bármely adott p_n pontban. Ez $f(\mathbf{p})$ kiszámítását igényli adott pontra. A gyakorlatban általában a két megközelítés kombinációját használják.

A TP-modelltranszformáció a következő felírást eredményezi az $\mathbf{S}(\mathbf{p})$ qLPV-modellre [6]:

$$\tilde{\mathbf{S}}(\mathbf{p}) = \mathcal{S} \boxtimes_{n=1}^N \tilde{\mathbf{U}}_n, \quad (2.73)$$

ahol $\tilde{\mathbf{U}}_n$ jelöli az \mathbf{U}_n mátrix \mathbf{u}_{n,i_n} oszlopvektornak lineáris interpolációval képzett folytonos súlyfüggvények halmazát az $[a_n, b_n]$ intervallumon. $\mathbf{S}(\mathbf{p})$ lineáris közelítése $\tilde{\mathbf{S}}(\mathbf{p})$ segítségével elfogadható. CHOSVD végrehajtása esetén $\mathbf{S}(\mathbf{p})$ és $\tilde{\mathbf{S}}(\mathbf{p})$ értékei a rácspontokon megegyeznek, míg RHOSVD végrehajtása esetén $\mathbf{S}(\mathbf{p})$ és $\tilde{\mathbf{S}}(\mathbf{p})$ közötti különbség értéke a (2.67) összefüggésnek felel meg. A kapott TP-modell és az eredeti modell közötti hiba jobb karakterizálása az Ω minél nagyobb számú pontján történő numerikus mintavételezéssel érhető el.

A (2.73) nem tartalmaz konvexitási feltételeket. A HOSVD módszer általában nem eredményez olyan \mathbf{U}_n mátrixot, amely megfelel a politopikus feltételeknek. Tehát a lineárisan interpolált folytonos változójú $\tilde{\mathbf{U}}_n$ mátrix sem lesz politopikus. Így a (2.73) modell nem használható a szabályozó tervezéséhez. Ez a modell valójában a HOSVD alapú TP kanonikus modell. A modell komplexitását az LTI rendszerek száma befolyásolja.

Újabb mintavételi pontok hozzáadása lehetséges. A $w_{n,i_n}(p_n)$ súlyfüggvények a (g_{n,m_n}) diszkrétizált pontokban helyezkednek el az $[a_n, b_n]$ intervallumon. Sűrűbb mintavételezés esetén újabb $p_d = g_d^a$ rácsvonal hozzáadása szükséges $[a_d, b_d]$ intervallumon d -dimenzió mentén. Így növelve a rácsvonalak számát az eredeti M_d rácstről $M_d + 1$ rácstra. A cél a d dimenziós súlyfüggvények elemeinek meghatározása az új $p_d = g_d^a$ rácspontban.

$\mathbf{S}(\mathbf{p}) \in \mathbb{R}^{(m+k) \times (m+l)}$ rendszermátrix diszkrétizálása a $\bar{\mathbf{p}}$ rácspont felett a kiterjesztett hiper-kocka rácson:

$$\bar{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} g_{1,\bar{m}_1} \\ \vdots \\ g_{d-1,\bar{m}_{d-1}} \\ g_d^a \\ g_{d+1,\bar{m}_{d+1}} \\ \vdots \\ g_{n,\bar{m}_n} \end{bmatrix}, \quad (2.74)$$

ahol $\bar{m}_n, n \neq d$ bármely $[1, \dots, M_n]$ index esetén. A $p_d = g_d^a$ d -dimenzióban lévő rácspontok $p_n = g_{n,\bar{m}_n}$ értékei megfelelnek az eredeti rácspontoknak az n -dimenzióban, $n \neq d$:

$$\mathbf{S}(\bar{\mathbf{p}}) = (\mathcal{S} \times_d \mathbf{w}_d^D(g_d^a)) \boxtimes_{n=1, n \neq d}^N \mathbf{w}_n^D(g_{n,\bar{m}_n}), \quad (2.75)$$

ahol $\mathbf{w}_d^D(g_d^a) \in \mathbb{R}^{1 \times I_d}$ a d -dimenziós súlyfüggvények a $p_d = g_d^a$ új rácsvonalon kifejezett értéke, illetve $\mathbf{w}_n^D(g_{n,\bar{m}_n}) \in \mathbb{R}^{1 \times I_n}$ pedig az n -dimenziós súlyfüggvények a $p_n = g_{n,\bar{m}_n}$ eredeti rácsvonalon kifejezett értéke, ahol $\mathbf{w}_n^D(g_{n,\bar{m}_n})$ az \bar{m}_n . sora \mathbf{U}_n mátrixnak:

$$\mathbf{S}(\bar{\mathbf{p}}) = (\mathcal{S} \times_d \mathbf{w}_d^D(g_d^a)) \boxtimes_{n=1, n \neq d}^N \mathbf{u}_n^{\bar{m}_n}, \quad (2.76)$$

ahol $\mathbf{w}_n^D(g_{n,\bar{m}_n}) = \mathbf{u}_n^{\bar{m}_n}$, illetve ebben az esetben $\mathbf{S}(\bar{\mathbf{p}})$ egy lineáris egyenletet alkot az ismeretlen $\mathbf{w}_d^D(g_d^a)$ megoldására. Az egyenlet két oldalán szereplő $(1 \times 1 \times \dots \times 1 \times (m +$

$k) \times (m + l)$) mennyiségek tenzorok. Ha mindkét oldalon a tenzorok d -módú mátrixait figyelembe vesszük, akkor az eredmény a következő:

$$(\mathbf{S}(\bar{\mathbf{p}}))_{(d)} = \mathbf{w}_d^D(g_d^a) \left(\mathcal{S}_{n=1, n \neq d}^{\boxtimes N} \mathbf{u}_n^{\bar{m}_n} \right)_{(d)}, \quad (2.77)$$

amely az alábbi megoldáshoz vezet:

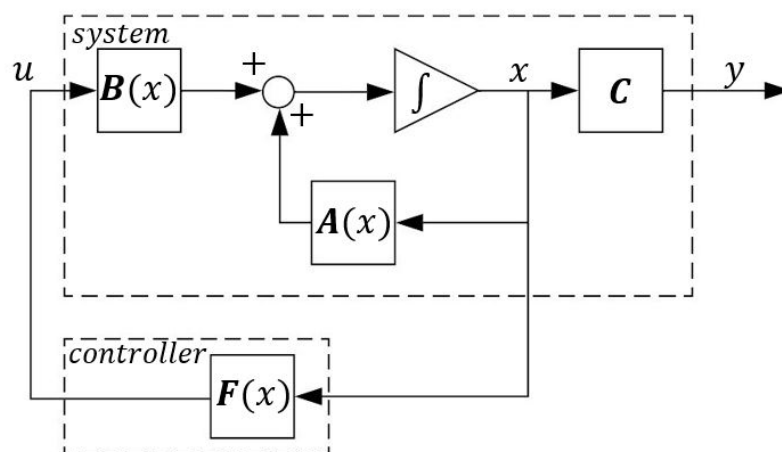
$$\mathbf{w}_d^D(g_d^a) = (\mathbf{S}(\bar{\mathbf{p}}))_{(d)} \left[\left(\mathcal{S}_{n=1, n \neq d}^{\boxtimes N} \mathbf{u}_n^{\bar{m}_n} \right)_{(d)} \right]^+. \quad (2.78)$$

2.4. Tenzorszorzat alapú szabályozó és megfigyelő

Ebben a fejezetben a TP-modelltranszformáció alapú állapotviszacsatolást alkalmazó szabályozó és állapotmegfigyelő tervezését mutatom be az LMI stabilitási feltételek használatával.

2.4.1. A szabályozó tervezése

A szabályozandó rendszeren alkalmazott tenzorszorzat alapú modelltranszformációt használó szabályozók tervezése két lépésből áll. Az első lépés az LPV, vagy qLPV-modellek alapján politopikus modellek generálása, a második lépés pedig a politopikus modellekhez a szabályozó tervezése [89]. A szabályozó tervezése a 2.3. ábrán látható. A TP-modelltranszformáció alapuló szabályozó tervezési módszer erre a struktúrára épül. Tehát az első lépésben a qLPV-modellek generálása a TP-modelltranszformáció végrehajtásán alapszik, amely során a HOSVD módszerével megkapom a TP-modell alakját. A



2.3. ábra. A szabályozó állapotviszacsatolással

második lépés a politopikus modellhez történő szabályozó tervezését foglalja magában,

amely a PDC keretrendszerben valósul meg. A szabályozó ugyanabban a politopikus struktúrában helyezkedik el, mint a modell. A struktúra pedig egyesíti az LTI rendszerek erősítéseinek visszacsatolását, amelyek a politopikus LTI rendszerekből származnak.

Ezek az erősítések a különböző irányításméletben használt technikák alkalmazásával kaphatók meg. Az egyik leghatékonyabb szabályozó tervezési módszer az LMI, ugyanis képes optimalizálni a kívánt szabályozási paramétereket és tulajdonságokat. Ezek a tulajdonságok lehetnek a kvadratikus vagy aszimptotikus stabilitás, a csillapodási sebesség szabályozása, vagy a különböző állapotvektorokra, kimenetekre és szabályozójelekre megfogalmazott korlátozások. Az LMI módszert általában PDC keretrendszerrel együtt alkalmazzák a gyakorlatban. A TP-modelltranszformáción alapuló LMI szabályozó tervezése a súlyfüggvények és LTI rendszerek konvex kombinációját igényli [19].

Adott a (2.24)-(2.25) qLPV-modell. A cél a qLPV-modell szabályozása. Az alkalmazandó szabályozó struktúra a következő:

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \mathbf{y}(t) \end{pmatrix} = \mathbf{S}(\mathbf{p}(t)) \begin{pmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{u}(t) \end{pmatrix}. \quad (2.79)$$

ahol $\mathbf{u}(t)$ meghatározása a következőképpen történik:

$$\mathbf{u}(t) = - \left(\mathcal{F} \boxtimes_{n \in N} \mathbf{w}_n(\mathbf{p}_n(t)) \right) \mathbf{x}(t), \quad (2.80)$$

ahol az \mathcal{F} tenzorban tárolt LTI visszacsatoló erősítések jelölése $\mathbf{F}_{i_1, i_2, \dots, i_N}$. Mindegyik erősítés megfelel \mathcal{S} tenzor $\mathbf{S}_{i_1, i_2, \dots, i_N}$ LTI rendszereinek. Azonban az LMI könnyen integrálható a PDC keretrendszerbe, ezért jelen dolgozat és kutatás során a TP-modelltranszformációt az LMI-alapú szabályozó tervezésével együttesen alkalmazom. A politopikus modell alapú tervezés használatához a TP-modell politopikus formába történő átalakítása szükséges, amelyhez a súlyfüggvények meghatározása a következő:

$$w_i(\mathbf{p}) = \prod_{n=1}^N w_{n, i_n}(p_n(t)), \quad (2.81)$$

ezután:

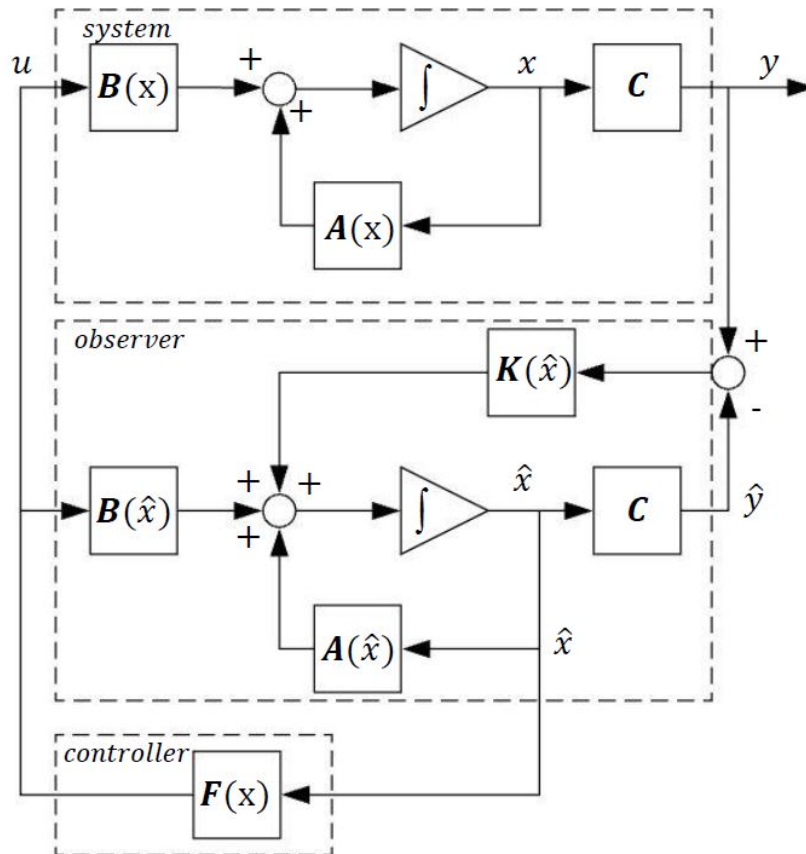
$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^I w_i(\mathbf{p}(t)) \mathbf{S}_i \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{u} \end{pmatrix}, \quad (2.82)$$

ahol a szabályozó az alábbi:

$$\mathbf{u} = - \left(\sum_{i=1}^I w_i(\mathbf{p}(t)) \mathbf{F}_i \right) \mathbf{x}. \quad (2.83)$$

2.4.2. Az állapotmegfigyelő tervezése

A 2.4. ábrán látható a módszer, amely olyan állapotvisszacsatoló szabályozó és megfigyelő egyidejű tervezésén [7, 8, 89, 91] alapul, amely képes a nem megfigyelhető állapotok közelítő meghatározására a rendszer be- és kimenetéből. Adott a (2.24)-(2.25) qLPV-modell. A cél a qLPV-modell szabályozása és adott esetben megfigyelése. Ebben az esetben a kimeneti visszacsatoláson alapuló szabályozó tervezési struktúra alkalmazható, ahol a nem mérhető állapotváltozókat egy megfigyelővel lehet közelíteni. Ha $\mathbf{p}(t)$ paramétervektor



2.4. ábra. A megfigyelő állapotvisszacsatolással

nem tartalmaz elemeket a becsült $\hat{\mathbf{x}}(t)$ állapotvektorból, akkor a következő szabályozó és megfigyelő struktúra alkalmazható:

$$\begin{pmatrix} \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) \\ \dot{\hat{\mathbf{y}}}(t) \end{pmatrix} = \mathbf{S}(\mathbf{p}(t)) \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{x}}(t) \\ \hat{\mathbf{u}}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{K}(\mathbf{p}(t)) \\ 0 \end{pmatrix} (\mathbf{y}(t) - \hat{\mathbf{y}}(t)), \quad (2.84)$$

ahol $\hat{\mathbf{u}}(t)$ a becsült szabályozójel, $(\mathbf{y}(t) - \hat{\mathbf{y}}(t))$ a kimeneti hiba, $\mathbf{y}(t)$ a mért kimenet, $\hat{\mathbf{y}}(t)$ a becsült kimenet, valamint

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{F}(\mathbf{p}(t))\hat{\mathbf{x}}(t). \quad (2.85)$$

A megfigyelőnek ki kell elégítenie az alábbi feltételt: $\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t) \rightarrow 0$, ha $t \rightarrow \infty$. A TP-modell szerkezet a következő:

$$\mathbf{S}(\mathbf{p}(t)) = \mathcal{S} \boxtimes_{n=1}^N \mathbf{w}_n(\mathbf{p}_n(t)), \quad (2.86)$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{p}(t)) = \mathcal{F} \boxtimes_{n=1}^N \mathbf{w}_n(\mathbf{p}_n(t)), \quad (2.87)$$

$$\mathbf{K}(\mathbf{p}(t)) = \mathcal{K} \boxtimes_{n=1}^N \mathbf{w}_n(\mathbf{p}_n(t)), \quad (2.88)$$

ahol $\mathbf{S}(\mathbf{p}(t))$ a rendszermátrix, $\mathbf{F}(\mathbf{p}(t))$ a szabályozó és $\mathbf{K}(\mathbf{p}(t))$ a megfigyelő mátrixsza. A szabályozó és a megfigyelő rendszer összetevői különböző LMI-alapú tervezési technikák segítségével generálhatók a rendszermátrix TP-modelljéből. Az LMI-alapú tervezési

módszer célja, hogy megtaláljuk az $\mathbf{F}_{i_1, i_2, \dots, i_N}$ szabályozó erősítéseket és a $\mathbf{K}_{i_1, i_2, \dots, i_N}$ megfigyelő erősítéseket, amelyek az \mathcal{F} és a \mathcal{K} tenzorban vannak tárolva, amelyek pedig az \mathcal{S} rendszertenzorban.

2.4.3. A zavar elnyomásának tervezése

A zavar olyan nem kívánt jel, amely egy visszacsatolt szabályozórendszerbe jut. A dolgozatban csak a bemeneten keletkező zavarok hatását vizsgálom, amely során a rendszer stabilitását az LMI módszerével valósítom meg az állapotvisszacsatoláson keresztül. A céлом pedig a zavar csillapításának elérése. A zavarelnyomás tervezési módszere a 2.5. ábrán látható.

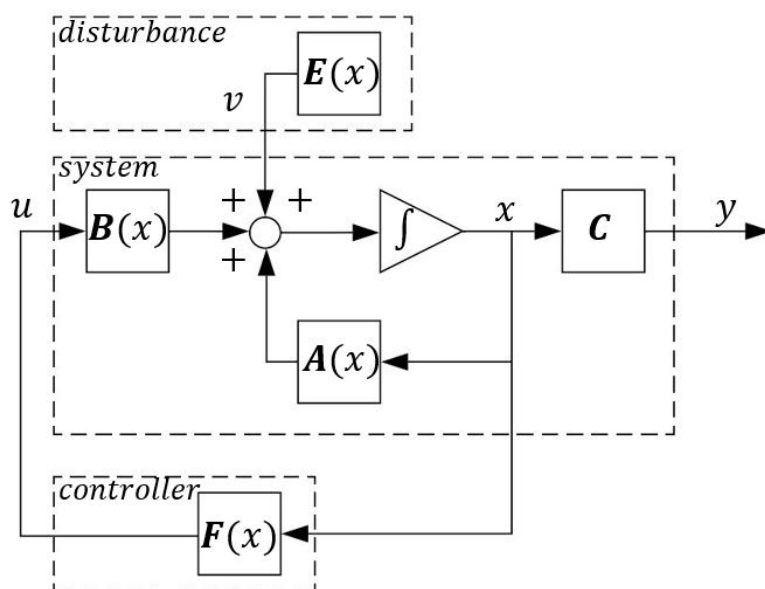
A zavarelnyomási teljesítőképesség a szabályozó robusztusságának elemzésére szolgáló mérőszám [7]. Az \mathbf{F}_i visszacsatoló erősítés stabilizálja a TP-modellt, és minimalizálja γ -t. Tekintsük a következő TP-modellt:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \sum_{i=1}^I w_i(\mathbf{p}(t)) \{ \mathbf{A}_i \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_i \mathbf{u}(t) + \mathbf{E}_i \mathbf{v}(t) \}, \quad (2.89)$$

$$\mathbf{y}(t) = \sum_{i=1}^I w_i(\mathbf{p}(t)) \{ \mathbf{C}_i \mathbf{x}(t) \}, \quad (2.90)$$

ahol $\mathbf{v}(t)$ a zavar. A cél, minimalizálni $\mathbf{v}(t)$ $\mathbf{y}(t)$ -ra gyakorolt hatásait. A γ minimalizálása a következő:

$$\sup_{\|\mathbf{v}(t)\|_2 \neq 0} \frac{\|\mathbf{y}(t)\|_2}{\|\mathbf{v}(t)\|_2} \leq \gamma. \quad (2.91)$$



2.5. ábra. A zavar elnyomása állapotvisszacsatolással

3. fejezet

Lineáris mátrix egyenlőtlenség módszere

Ez a fejezet az LMI [7] alkalmazását mutatja be az irányítástechnikában alkalmazott szabályozó és/vagy állapotmegfigyelő tervezésének szempontjából. Az LMI megoldásához a YALMIP szoftvercsomagot használok a MATLAB programban [53].

3.1. Az LMI

Napjainkban számos szoftvercsomag létezik az általános irányításelméleti optimalizációs problémák numerikus megoldására, például a lineáris és kvadratikus programok, a szemi-definit programok, a robusztus optimalizáció stb. [30].

Az LMI-k története dinamikus rendszerek vizsgálatához több, mint száz évvel ezelőttre vezethető vissza [20]. Így az általános LMI forma tulajdonképpen Lyapunov nevéhez fűződik, ugyanis 1890 körül Lyapunov publikálta azt a művét, amelyet ma Lyapunov-elméletnek ismerünk [28]. Az 1940-es években már használták Lyapunov módszerét a valós életben fellépő mérnöki, irányítástechnikai problémák megoldására [27], egyelőre analitikus úton. 1980 körül az LMI-eket numerikus módon oldották meg konvex programozással, ezzel időt és pontosabb eredményeket nyerve.

Az irányításelméletben felmerülő problémák megoldására több módszer létezik, azonban az LMI-k használata széles körben elterjedt. LMI-eket használnak a rendszeridentifikáció területén is [30]. Az LMI szerkezete lehetővé teszi a mátrixok alkalmazását egyenlőtlenségek formájában. Az LMI legnagyobb előnye, hogy numerikusan megadhatók és megoldhatók, továbbá számos korlátozást, feltételt és célt lehet a tervezésekor alkalmazni, használatával hatékonyan megoldhatók a konvex optimalizációs problémák. Továbbá az LMI stabilitási feltételekkel lehet stabil szabályozót tervezni a rendszerhez.

Az LMI használatának előnyei [21]:

- globális optimális megoldás a konvex LMI problémákra,
- hatékony és megbízható numerikus megoldás,
- többnyire megoldhatók (feasibility).

Számos probléma, például az állapotvisszacsatolás, a robusztusság, valamint H_2 és H_∞ szabályozás tervezése és analízise az LMI-ket tartalmazó konvex vagy kvázikonvex problémákra redukálhatók [21]. Az LMI módszer által kezelt problémák a következők lehetnek [6, 15–17, 20]:

- rendszerek robusztus stabilitása [25],
- robusztus H_∞ szabályozás [26],
- sztochasztikus rendszerek szabályozása [27],
- súlyozott interpolációs problémák [27],
- az LTI rendszereknek a bemeneti, az állapot és a kimeneti tulajdonságai [27],
- multi objektív állapotvisszacsatolás tervezése [27],
- robusztus pólus áthelyezés,
- kvadratikus stabilitás vizsgálat [29] stb.

3.2. Az LMI struktúrája

Az LMI szerkezete a következő szigorú egyenlőtlenséggel írható le [20]:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) \triangleq \mathbf{F}_0 + \sum_{i=1}^m \mathbf{x}_i \mathbf{F}_i \succ 0, \quad (3.1)$$

ahol $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^m$ a változó, $\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^T \in \mathbf{R}^{n \times n}$ a szimmetrikus mátrixok, illetve $i = 0, \dots, m$. $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ pedig pozitív definit. Az LMI korlátozva van \mathbf{x} -en konvex módon, ezáltal $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{F}(\mathbf{x}) \succ 0\}$ is konvex. A nem szigorú egyenlőtlenség pedig a következőképpen írható le:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) \succeq 0. \quad (3.2)$$

3.3. LMI mátrix változókkal

Számos rendszer és szabályozás esetében felmerülő problémák átdolgozhatók LMI problémákká, azonban a változók gyakran mátrixok, ezért a Lyapunov-egyenlőtlenség alkalmazása az alapja az LMI módszerének [20]:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{P} \prec 0, \quad (3.3)$$

ahol $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T$ a változó. Amennyiben létezik pozitív definit \mathbf{P} mátrix, úgy a stabilitás biztosított. A fenti LMI dinamikus rendszerek stabilitásvizsgálata érdekében analitikusan is megoldható. Tehát ebben az esetben a szabályozó tervezésének célja, \mathbf{F} meghatározása úgy, hogy a zárt rendszer kvadratikusán stabil legyen:

$$[\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{F}]^T \mathbf{P} [\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{F}] - \mathbf{P} \prec 0. \quad (3.4)$$

A fenti egyenlőtlenséget a bal és a jobb oldalról beszorozva \mathbf{P}^{-1} -el a következő egyenlőtlenséget eredményezi:

$$\mathbf{P}^{-1}[\mathbf{A} - \mathbf{BF}]^T \mathbf{P}[\mathbf{A} - \mathbf{BF}] \mathbf{P}^{-1} - \mathbf{P}^{-1} \mathbf{P} \mathbf{P}^{-1} \prec 0, \quad (3.5)$$

$\mathbf{X} = \mathbf{P}^{-1}$ és $\mathbf{M} = \mathbf{FX}$ jelölés bevezetésével, valamint a műveletek elvégzése után a következő egyenlőtlenséget kapom:

$$\mathbf{X} - [\mathbf{AX} - \mathbf{BM}]^T \mathbf{X}^{-1} [\mathbf{AX} - \mathbf{BM}] \succ 0, \quad (3.6)$$

amely pedig LMI formába transzformálható a Schur-komplemenssel [7] [24]:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X} & (\mathbf{AX} - \mathbf{BM})^T \\ (\mathbf{AX} - \mathbf{BM}) & \mathbf{X} \end{bmatrix} \succ 0. \quad (3.7)$$

3.3.1. Definíció. *Schur-komplemens.* A Schur-komplemens alapján \mathbf{A} particionált mátrix felírható [74]:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad (3.8)$$

például ha A_{11} nonszinguláris, $A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$ a Schur komplemente A_{11} elemnek, amelyet $S_{ch}(A_{11})$ jelöl. Így az \mathbf{A} mátrix átírható:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & S_{ch}(A_{11}) \end{bmatrix}. \quad (3.9)$$

3.4. Az LMI alkalmazásának formái

A szabályozás, az identifikáció és a jelfeldolgozás területén felmerülő optimalizálási problémák megfogalmazhatók az LMI segítségével. Ezeket a problémákat csak akkor van értelme LMI környezetbe implementálni, ha azok hatékonyan és megbízhatóan megoldhatók. Mivel $\mathbf{F}(\mathbf{x}) \succ 0$ egy konvex korlátozást határoz meg \mathbf{x} változóra, ezért az optimalizálási problémák egy teljesíthetőségi függvény minimalizálását, vagy maximalizálását foglalják magukban, amelyek a konvex optimalizálási problémák osztályába tartoznak. Az LMI alkalmazásával kapcsolatban felmerülő általános problémák [6, 15–17, 20, 21]:

1. **Lineáris mátrix egyenlőtlenség probléma (LMIP).** Adott $\mathbf{F}(\mathbf{x}) \succ 0$ LMI, a megfelelő LMI probléma \mathbf{x}^{feas} megtalálása oly módon, hogy $\mathbf{F}(\mathbf{x}^{feas}) \succ 0$, vagy nem megoldható (non-feasible). Ez egy konvex feasibility probléma. LMI megoldás esetén mindig LMIP-t oldunk meg.
2. **Sajátérték probléma (EVP).** A sajátérték probléma egy mátrix maximális sajátértékének, azaz $\lambda \in \mathbb{R}$ minimalizálását jelenti, amely kizárólag egy változótól függ adott LMI korlátozás mellett:

$$\begin{cases} \lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}(\mathbf{x}) \succ 0 \\ \mathbf{B}(\mathbf{x}) \succ 0 \end{cases}, \quad (3.10)$$

ahol \mathbf{A} és \mathbf{B} olyan szimmetrikus mátrixok, amelyek affin módon függenek az x optimalizálási változótól. Tehát ez egy konvex optimalizálási probléma. Az EVP-k megjelenhetnek egy LMI alá tartozó lineáris függvény minimalizálásának egyenértékű formájában:

$$\begin{cases} c^T \mathbf{x} \\ \mathbf{F}(\mathbf{x}) \succ 0 \end{cases}, \quad (3.11)$$

ahol $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ egy affin függvény.

3. **Általánosított sajátérték probléma (GEVP)**. Az általánosított sajátérték probléma egy változótól affin módon függő mátrixpár maximális $\lambda \in \mathbb{R}$ sajátértékének minimalizálása adott LMI korlátozás mellett. A GEVP általános formája a következő:

$$\begin{cases} \lambda \mathbf{B}(\mathbf{x}) - \mathbf{A}(\mathbf{x}) \succ 0 \\ \mathbf{B}(\mathbf{x}) \succ 0 \\ \mathbf{C}(\mathbf{x}) \succ 0 \end{cases}, \quad (3.12)$$

ahol \mathbf{A} , \mathbf{B} és \mathbf{C} szimmetrikus mátrixok és \mathbf{x} affin függvényei.

A MATLAB program LMI Toolbox-ban található `gevp` solver minimalizálja λ -t és megoldást ad a problémára.

4. **Konvex probléma (CP)**. Tekintsük a következő konvex problémát, ahol $\log \det \mathbf{A}(\mathbf{x})^{-1}$ minimalizálása a cél:

$$\begin{cases} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \succ 0 \\ \mathbf{B}(\mathbf{x}) \succ 0 \end{cases}, \quad (3.13)$$

ahol \mathbf{A} és \mathbf{B} szimmetrikus mátrixok, amelyek affin módon függenek \mathbf{x} -től.

A következő LMI feltétel konvex:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}_0 + \mathbf{x}_1 \mathbf{A}_1 + \cdots + \mathbf{x}_n \mathbf{A}_n \prec 0, \quad (3.14)$$

legyen $\mathbf{A}_i \in \mathbb{S}^m$, $i = 0, 1, \dots, n$ és

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}_0 + \mathbf{x}_1 \mathbf{A}_1 + \cdots + \mathbf{x}_n \mathbf{A}_n, \quad (3.15)$$

ekkor $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}(\mathbf{x}) \prec 0\}$ egy nyitott konvex halmaz, $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}(\mathbf{x}) \leq 0\}$ egy zárt konvex halmaz.

5. **Megoldhatósági (feasibility) probléma**. Feasibility probléma esetén x változóra $x \in \mathbb{R}^n$ megoldást keresünk, amely kielégíti az alábbi LMI feltételt:

$$\mathbf{A}(x) \prec \mathbf{B}(x). \quad (3.16)$$

A cél t minimalizálása:

$$\mathbf{A}(x) \prec \mathbf{B}(x) + t\mathbf{I}, \quad (3.17)$$

ahol x és t skalár a döntésváltozók. Az LMI akkor feasible, ha x létezik, egyéb esetben az $\mathbf{A}(x) \prec \mathbf{B}(x)$ LMI nem feasible.

A MATLAB program LMI Toolbox-ban található `feasp` solver minimalizálja t -t.

6. **Optimalizálási probléma.** Legyen $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ és $\mathcal{S} := \{x \mid \mathbf{F}(x) > 0\}$. $\mathbf{F} : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{S}$ affin függvény. A probléma pedig

$$V_{opt} = \inf_{x \in \mathcal{S}} f(x) \quad (3.18)$$

meghatározása. Ez az optimalizációs probléma magába foglalja V_{opt} meghatározását és tetszőleges $\epsilon > 0$ kiszámítását egy majdnem optimális x megoldásra, amely kielégíti a következő feltételeket:

$$x \in \mathcal{S}, V_{opt} \leq f(x) \leq V_{opt} + \epsilon. \quad (3.19)$$

A felsorolt problémák jól kezelhetőek elméleti és gyakorlati szempontból egyaránt, ugyanis polinomiális időben és a gyakorlatban egyszerűen megoldhatók. A megoldás alatt azt kell érteni, hogy a probléma megoldható (feasible), avagy sem. Amennyiben feasible, olyan pontot kell kiszámítani, amelynek értéke meghaladja a globális minimumot kisebb mértékben, mint egy előre meghatározott pontosság.

3.5. LMI stabilitási feltételek

A folytonos idejű TP-modell egyensúlyi állapota $\mathbf{u}(t) = 0$ -val globálisan aszimptotikusan stabil, ha létezik közös pozitív definit \mathbf{P} mátrix, amely kielégíti a következő feltételt:

$$\mathbf{A}_i^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}_i < 0, \quad (3.20)$$

ahol $i = 1, 2, \dots, I$ és a közös \mathbf{P} mátrix minden alrendszerre vonatkozik.

3.5.1. Az LMI-alapú szabályozó

A visszacsatoló erősítés meghatározása a PDC keretrendszerben történik az LMI módszerével:

$$\mathbf{u}(t) = - \sum_{i=1}^I w_i(\mathbf{p}(t)) \mathbf{F}_i \mathbf{x}(t) = - \left(\sum_{i=1}^I w_i(\mathbf{p}(t)) \mathbf{F}_i \right) \mathbf{x}(t) = -\mathbf{F}^T \mathbf{x}(t), \quad (3.21)$$

amely után az állapot tér alakba való behelyettesítés után a következő alakot kapom:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \sum_{i=1}^I w_i \left[\mathbf{A}_i \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_i \left(- \sum_{j=1}^J w_j \mathbf{F}_j \mathbf{x}(t) \right) \right], \quad (3.22)$$

ahol I, J a kapott LTI rendszerek száma, és $i = 1, \dots, I$, $j = i + 1, \dots, I$. A (3.22) kifejezés átírható az alábbi alakra:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J w_i w_j [\mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i \mathbf{F}_j] \mathbf{x}(t), \quad (3.23)$$

Bevezetve az alábbi jelöléseket:

$$\mathbf{G}_{ii} = \mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i \mathbf{F}_i, \quad (3.24)$$

$$\mathbf{G}_{ij} = \mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i \mathbf{F}_j, \quad (3.25)$$

$$\mathbf{G}_{ji} = \mathbf{A}_j - \mathbf{B}_j \mathbf{F}_i, \quad (3.26)$$

a (3.23) kifejezést a következő alakra lehet átírni:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \sum_{i=1}^I w_i w_i [\mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i \mathbf{F}_i] \mathbf{x}(t) + 2 \sum_{i=1}^I \sum_{i < j}^J w_i w_j \mathbf{G}_{ij} \mathbf{x}(t), \quad (3.27)$$

ahol:

$$\mathbf{G}_{ij} = \frac{[\mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i \mathbf{F}_j] + [\mathbf{A}_j - \mathbf{B}_j \mathbf{F}_i]}{2}. \quad (3.28)$$

Ekkor a TP-modell egyensúlyi állapota globálisan aszimptotikusan stabil, ha létezik olyan közös pozitív definit \mathbf{P} mátrix, amelyre felírható:

$$\mathbf{G}_{ii}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{G}_{ii} \prec 0, \quad (3.29)$$

$$\left(\frac{\mathbf{G}_{ij} + \mathbf{G}_{ji}}{2} \right)^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \left(\frac{\mathbf{G}_{ij} + \mathbf{G}_{ji}}{2} \right) \preceq 0. \quad (3.30)$$

A (3.29) egyenlőtlenséget \mathbf{G}_{ii} behelyettesítésével a bal és a jobb oldalról beszorozva \mathbf{P}^{-1} -el, $\mathbf{X} = \mathbf{P}^{-1}$ behelyettesítése után a következő egyenlőtlenséget eredményezi:

$$-\mathbf{X} \mathbf{A}_i^T - \mathbf{A}_i \mathbf{X} + \mathbf{X} \mathbf{F}_i^T \mathbf{B}_i^T + \mathbf{B}_i \mathbf{F}_i \mathbf{X} \succ 0, \quad (3.31)$$

\mathbf{G}_{ij} és \mathbf{G}_{ji} behelyettesítése után a (3.31) egyenlőtlenséget a bal és jobb oldalról \mathbf{P}^{-1} -el szorzom, illetve $\mathbf{X} = \mathbf{P}^{-1}$:

$$-\mathbf{X} \mathbf{A}_i^T - \mathbf{A}_i \mathbf{X} - \mathbf{X} \mathbf{A}_j^T - \mathbf{A}_j \mathbf{X} + \mathbf{X} \mathbf{F}_j^T \mathbf{B}_i^T + \mathbf{B}_i \mathbf{F}_j \mathbf{X} + \mathbf{X} \mathbf{F}_i^T \mathbf{B}_j^T + \mathbf{B}_j \mathbf{F}_i \mathbf{X} \succ 0, \quad (3.32)$$

Végül a matematikai műveletek elvégzése után két stabilitási feltételt kapok, amivel stabil LMI-alapú szabályozót lehet tervezni a nemlineáris dinamikus rendszerhez. Az LMI az \mathbf{F}_i szabályozó vektort numerikus úton állítja elő [7]. A rendszer aszimptotikus stabilitásának meghatározása érdekében a stabil szabályozó meghatározása $\mathbf{M}_i = \mathbf{F}_i \mathbf{X}$ és $\mathbf{M}_j = \mathbf{F}_j \mathbf{X}$ behelyettesítésével történik.

A politopikus modell a szabályozóval aszimptotikusan stabil, ha létezik olyan pozitív definit $\mathbf{X} \succ 0$ és \mathbf{M}_i , amely kielégíti az alábbi feltételeket:

$$-\mathbf{X} \mathbf{A}_i^T - \mathbf{A}_i \mathbf{X} + \mathbf{M}_i^T \mathbf{B}_i^T + \mathbf{B}_i \mathbf{M}_i \succ 0, \quad (3.33)$$

minden i -re,

$$\begin{aligned} -\mathbf{X} \mathbf{A}_i^T - \mathbf{A}_i \mathbf{X} - \mathbf{X} \mathbf{A}_j^T - \mathbf{A}_j \mathbf{X} + \mathbf{M}_i^T \mathbf{B}_i^T + \mathbf{B}_i \mathbf{M}_j \\ + \mathbf{M}_i^T \mathbf{B}_j^T + \mathbf{B}_j \mathbf{M}_i \succeq 0, \end{aligned} \quad (3.34)$$

minden $i < j \leq I$ -re kivéve (i, j) párokat amely esetében $\forall \mathbf{p}(t) : w_i(\mathbf{p}(t)) w_j(\mathbf{p}(t)) = 0$, ahol $i = 1, \dots, I, j = i+1, \dots, I$ és I az LTI rendszerek teljes száma és ahol a visszacsatoló erősítés \mathbf{X} és \mathbf{M}_i megoldásaiból: $\mathbf{F}_i = \mathbf{M}_i \mathbf{X}^{-1}$.

A HOSVD módszerét végrehajtva, a CNO súlyfüggvényekkel a MATLAB programban használt algoritmusok a következők:

$$[\mathbf{S}, \mathbf{w}, \mathbf{sv}] = \text{hosvd}(\mathbf{S}, [1 \ 1 \ 0 \ 0], 1e-9);$$

```

wr{1}=genhull(w{1},'cno');
wr{2}=genhull(w{2},'cno');
for i=1:dim
    wrp{i}=pinv(wr{i});
end
Sc=tprods(S,wrp);

```

ahol Sc a tenzorszorzat eredménye. Az LMI megoldásához szükség van az LMI szerkezetének meghatározására (`lmistruct`), az LMI feltételekre (`lmiasym`) és a szabályozó (`lmisolve`) meghatározására:

```

lmi = lmistruct(Sc, n);
lmi = lmiasym(lmi);
F = lmisolve(lmi);

```

ahol (`lmistruct`) és (`lmiasym`) MATLAB függvények. Az alkalmazott LMI feltételek a következők:

```

for r = 1:R
    for s = r+1:R
        Ar = reshape(A(r,:,:), [n n]);
        As = reshape(A(s,:,:), [n n]);
        Br = reshape(B(r,:,:), [n m]);
        Bs = reshape(B(s,:,:), [n m]);
        lmi.F = lmi.F + [-X*Ar' - Ar*X + Br*Mr + Mr'*Br' > 0];
        lmi.F = lmi.F + [-X*Ar' - Ar*X - X*As' - As*X + Br*Ms + Ms'*Br' + Bs*Mr
+ Mr'*Bs' >= 0];
    end
end

```

3.5.1. Definíció. *Csillapodási sebesség (decay rate).* A csillapodási sebesség a legnagyobb Lyapunov kitevő, amivel a válasz sebessége összefügg. A cél a kívánt sebesség maximalizálása, amely során a rendszer gyorsabban kerül a stacionárius állapotba. Minél nagyobb a lecsengési ráta, annál hamarabb érjük el a kívánt állapotot. A csillapodási sebesség legnagyobb alsó korlátját a következő általánosított sajátérték minimalizálási probléma (GEVP) megoldása garantálja [7]:

α maximalizálása a következő feltételek mellett:
 $\mathbf{X}, \mathbf{M}_1, \dots, \mathbf{M}_l$

$$\mathbf{X} \succ 0, \quad (3.35)$$

$$-\mathbf{X}\mathbf{A}_i^T - \mathbf{A}_i\mathbf{X} + \mathbf{M}_i^T\mathbf{B}_i^T + \mathbf{B}_i\mathbf{M}_i - 2\alpha\mathbf{X} \succ 0, \quad (3.36)$$

$$-\mathbf{X}\mathbf{A}_i^T - \mathbf{A}_i\mathbf{X} - \mathbf{X}\mathbf{A}_j^T - \mathbf{A}_j\mathbf{X} + \mathbf{M}_j^T\mathbf{B}_i^T + \mathbf{B}_i\mathbf{M}_j + \mathbf{M}_i^T\mathbf{B}_j^T + \mathbf{B}_j\mathbf{M}_i - 4\alpha\mathbf{X} \succeq 0, \quad (3.37)$$

ahol $i = 1, \dots, I, j = i + 1, \dots, I$ és I az LTI rendszerek teljes száma, illetve α a csillapodási sebesség korlátja.

A szabályozó bemenetére és kimenetére vonatkozó korlátozások

3.5.1. Tétel. *Bemeneti korlátozás.* Feltételezzük, hogy az $x(0)$ kezdeti feltétel ismert. A korlátozás $\|\mathbf{u}(t)\|_2 \leq \mu$ kényszerítve van minden $t \geq 0$ időpillanatban ha az

$$\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{x}(0)^T \\ \mathbf{x}(0) & \mathbf{X} \end{bmatrix} \succcurlyeq \mathbf{0}, \quad (3.38)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{M}_i^T \\ \mathbf{M}_i & \mu^2 \mathbf{I} \end{bmatrix} \succcurlyeq \mathbf{0}, \quad (3.39)$$

LMI-k megoldhatók, és $\mathbf{X} = \mathbf{P}^{-1}$, $\mathbf{M}_i = \mathbf{F}_i \mathbf{X}$ és $i = 1, \dots, I$.

3.5.2. Tétel. *Kimeneti korlátozás.* Feltételezzük, hogy az $x(0)$ kezdeti feltétel ismert. A korlátozás $\|\mathbf{y}(t)\|_2 \leq \lambda$ kényszerítve van minden $t \geq 0$ időpillanatban ha az

$$\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{x}(0)^T \\ \mathbf{x}(0) & \mathbf{X} \end{bmatrix} \succcurlyeq \mathbf{0}, \quad (3.40)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{X} \mathbf{C}_i^T \\ \mathbf{C}_i \mathbf{X} & \lambda^2 \mathbf{I} \end{bmatrix} \succcurlyeq \mathbf{0}, \quad (3.41)$$

LMI-k megoldhatók, $\mathbf{X} = \mathbf{P}^{-1}$ és $i = 1, \dots, I$.

3.5.3. Tétel. *Kezdeti állapottól független feltétel.* A bemeneti és kimeneti korlátozási LMI feltételek a rendszer kezdeti állapotától függenek. Tehát \mathbf{F}_i visszacsatolási erősítéseket újra meg kell határozni a fenti LMI segítségével, ha az $\mathbf{x}(0)$ kezdeti állapotok megváltoznak. Ez egy hátránya az LMI szabályozási bemeneten és kimeneten alkalmazott LMI feltételeknek. Ezáltal módosítani kell a szabályozási bemenetre és kimenetre vonatkozó LMI korlátozásokat, ahol $\mathbf{x}(0)$ ismeretlen de az $\|\mathbf{x}(0)\|$ felső ϕ határa ismert, $\|\mathbf{x}(0)\| \leq \phi$. A módosított LMI a következő [7]:

$$\mathbf{x}^T(0) \mathbf{X}^{-1} \mathbf{x}(0) \leq 1, \quad (3.42)$$

ha

$$\phi^2 \mathbf{I} \leq \mathbf{X}, \quad (3.43)$$

ahol $\mathbf{X} = \mathbf{P}^{-1}$. Ezáltal:

$$\mathbf{X}^{-1} \leq \frac{1}{\phi^2} \mathbf{I}, \quad (3.44)$$

$$\mathbf{x}^T(0) \mathbf{X}^{-1} \mathbf{x}(0) \leq \frac{1}{\phi^2} \mathbf{x}^T(0) \mathbf{x}(0) \leq 1. \quad (3.45)$$

3.5.2. Az LMI-alapú állapotmegfigyelő

Az állapotvisszacsatoló alapú szabályozó és az állapotmegfigyelő tervezése politopikus alakban a következő módon írható fel:

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \sum_{i=1}^I w_i(\mathbf{p}(t)) [(\mathbf{A}_i \hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}_i \mathbf{u}(t)) + \mathbf{K}_i (\mathbf{y}(t) - \hat{\mathbf{y}}(t))], \quad (3.46)$$

$$\hat{\mathbf{y}}(t) = \sum_{i=1}^I w_i(\mathbf{p}(t)) \mathbf{C}_i \hat{\mathbf{x}}(t), \quad (3.47)$$

$$\mathbf{u}(t) = - \sum_{i=1}^I w_i(\mathbf{p}(t)) \mathbf{F}_i \hat{\mathbf{x}}(t), \quad (3.48)$$

ahol a szabályozó garantálja a nemlineáris rendszer stabilitását, az állapotmegfigyelőnek pedig a következő feltételt kell teljesítenie:

$$\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t) \rightarrow 0, \quad (3.49)$$

ahol $\hat{\mathbf{x}}(t)$ jelöli a TP-modelltranszformáció alapú állapotmegfigyelőnek a becsült állapotváltozóit. Tehát $\mathbf{x}(t)$ és $\hat{\mathbf{x}}(t)$ között fellépő hibának a 0-hoz kell konvergálnia. A (3.29) és (3.30) egyenlőtlenségeket alapul véve az állapotmegfigyelő alapú LMI-k meghatározása a következő:

$$\mathbf{G}_{ii}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{G}_{ii} \prec 0, \quad (3.50)$$

$$\left(\frac{\mathbf{G}_{ij} + \mathbf{G}_{ji}}{2} \right)^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \left(\frac{\mathbf{G}_{ij} + \mathbf{G}_{ji}}{2} \right) \preceq 0, \quad (3.51)$$

ahol ebben az esetben \mathbf{G}_{ii} , \mathbf{G}_{ij} és \mathbf{G}_{ji} :

$$\mathbf{G}_{ii} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i \mathbf{F}_i & \mathbf{B}_i \mathbf{F}_i \\ 0 & \mathbf{A}_i - \mathbf{K}_i \mathbf{C}_i \end{bmatrix}, \quad (3.52)$$

$$\mathbf{G}_{ij} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i \mathbf{F}_j & \mathbf{B}_i \mathbf{F}_j \\ 0 & \mathbf{A}_i - \mathbf{K}_i \mathbf{C}_j \end{bmatrix}, \quad (3.53)$$

$$\mathbf{G}_{ji} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_j - \mathbf{B}_j \mathbf{F}_i & \mathbf{B}_j \mathbf{F}_i \\ 0 & \mathbf{A}_j - \mathbf{K}_j \mathbf{C}_i \end{bmatrix}. \quad (3.54)$$

\mathbf{G}_{ii} , \mathbf{G}_{ij} és \mathbf{G}_{ji} behelyettesítése és a matematikai műveletek elvégzése (mátrix szorzás, transzponálás, Schur-komplemens) után a következő egyenlőtlenségeket kapom:

$$\mathbf{A}_i^T \mathbf{P}_1 - \mathbf{F}_i^T \mathbf{B}_i^T \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_1 \mathbf{A}_i - \mathbf{P}_1 \mathbf{B}_i \mathbf{F}_i \prec 0, \quad (3.55)$$

$$\mathbf{A}_i^T \mathbf{P}_2 - \mathbf{C}_i^T \mathbf{K}_i^T \mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_2 \mathbf{A}_i - \mathbf{P}_2 \mathbf{K}_i \mathbf{C}_i \prec 0, \quad (3.56)$$

$$\mathbf{A}_i^T \mathbf{P}_2 - \mathbf{C}_j^T \mathbf{K}_i^T \mathbf{P}_2 + \mathbf{A}_j^T \mathbf{P}_2 - \mathbf{C}_i^T \mathbf{K}_j^T \mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_2 \mathbf{A}_i - \mathbf{P}_2 \mathbf{K}_i \mathbf{C}_j + \mathbf{P}_2 \mathbf{A}_j - \mathbf{P}_2 \mathbf{K}_j \mathbf{C}_i \preceq 0, \quad (3.57)$$

$$\mathbf{A}_i^T \mathbf{P}_1 - \mathbf{F}_j^T \mathbf{B}_i^T \mathbf{P}_1 + \mathbf{A}_j^T \mathbf{P}_1 - \mathbf{F}_i^T \mathbf{B}_j^T \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_1 \mathbf{A}_i - \mathbf{P}_1 \mathbf{B}_i \mathbf{F}_j + \mathbf{P}_1 \mathbf{A}_j - \mathbf{P}_1 \mathbf{B}_j \mathbf{F}_i \preceq 0. \quad (3.58)$$

Ezután a bal és jobb oldalról szorzom az egyenlőtlenségeket \mathbf{P}^{-1} -el, $\mathbf{P}^T = \mathbf{P}$, $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2 \succ 0$, majd behelyettesítve $\mathbf{F}_i = \mathbf{M}_i \mathbf{P}_1^{-1}$, $\mathbf{F}_j = \mathbf{M}_j \mathbf{P}_1^{-1}$, $\mathbf{K}_i = \mathbf{P}_2^{-1} \mathbf{N}_i$, $\mathbf{K}_j = \mathbf{P}_2^{-1} \mathbf{N}_j$, megkapom az LMI feltételeket (3.59-3.62).

A kimeneti állapotvisszacsatoló szabályozási struktúra globálisan aszimptotikusan stabil, ha létezik olyan $\mathbf{P}_1 \succ 0$, $\mathbf{P}_2 \succ 0$ és $\mathbf{M}_{1,i}$, $\mathbf{N}_{2,i}$ ($i = 1, \dots, I$), amely kielégíti az alábbi feltételeket:

$$\mathbf{P}_1 \mathbf{A}_i^T - \mathbf{M}_i^T \mathbf{B}_i^T + \mathbf{A}_i \mathbf{P}_1 - \mathbf{B}_i \mathbf{M}_i \prec 0, \quad (3.59)$$

$$\mathbf{A}_i^T \mathbf{P}_2 - \mathbf{C}_i^T \mathbf{N}_i^T + \mathbf{P}_2 \mathbf{A}_i - \mathbf{N}_i \mathbf{C}_i \prec 0, \quad (3.60)$$

minden i -re,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_1 \mathbf{A}_i^T - \mathbf{M}_j^T \mathbf{B}_i^T + \mathbf{A}_i \mathbf{P}_1 - \mathbf{B}_i \mathbf{M}_j + \mathbf{P}_1 \mathbf{A}_j^T \\ - \mathbf{M}_i^T \mathbf{B}_j^T + \mathbf{A}_j \mathbf{P}_1 - \mathbf{B}_j \mathbf{M}_i \prec 0, \end{aligned} \quad (3.61)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_i^T \mathbf{P}_2 - \mathbf{C}_j^T \mathbf{N}_i^T + \mathbf{P}_2 \mathbf{A}_i - \mathbf{N}_i \mathbf{C}_j + \mathbf{A}_j^T \mathbf{P}_2 \\ - \mathbf{C}_i^T \mathbf{N}_j^T + \mathbf{P}_2 \mathbf{A}_j - \mathbf{N}_j \mathbf{C}_i \prec 0, \end{aligned} \quad (3.62)$$

$i < j \leq I$ -re, kivéve (i, j) párokat amely esetében $\forall \mathbf{p}(t) : w_i(\mathbf{p}(t)) w_j(\mathbf{p}(t)) = 0$, ahol $i = 1, \dots, I$, $j = i + 1, \dots, I$, ahol I az LTI rendszerek teljes száma, $\mathbf{M}_{1,i} = \mathbf{F}_i \mathbf{P}_1$ és $\mathbf{N}_{2,i} = \mathbf{P}_2 \mathbf{K}_i$. A visszacsatoló erősítés és a megfigyelő erősítés meghatározható az LMI megoldásából: $\mathbf{F}_i = \mathbf{M}_{1,i} \mathbf{P}_1^{-1}$ és $\mathbf{K}_i = \mathbf{P}_2^{-1} \mathbf{N}_{2,i}$. Az alkalmazott függvények:

```
lmi = lmistruct(Sc, n);
lmi = lmiasymdecay(lmi, alpha);
lmi = lmiinputobs(lmi, umax, mu);
[F, K] = lmi solve(lmi);
```

ahol az LMI feltételek a következők:

```
for r = 1:R
    for s = r+1:R
        Ar = reshape(A(r, :, :), [n n]);
        As = reshape(A(s, :, :), [n n]);
        Br = reshape(B(r, :, :), [n m]);
        Bs = reshape(B(s, :, :), [n m]);
        Cr = reshape(C(r, :, :), [p n]);
        Cs = reshape(C(s, :, :), [p n]);
        lmi.F = lmi.F + [X*Ar' + Ar*X - Br*Mr - Mr'*Br' + 2*alpha*X < 0];
        lmi.K = lmi.K + [Ar'*P2 - Cr'*Nr' + P2*Ar - Nr*Cr + 2*alpha*P2 < 0];
        lmi.F = lmi.F + [X*Ar' + Ar*X + X*As' + As*X - Br*Ms - Ms'*Br' - Bs*Mr
- Mr'*Bs' + 4*alpha*X < 0];
        lmi.K = lmi.K + [Ar'*P2 - Cs'*Nr' + P2*Ar - Nr*Cs + As'*P2 - Cr'*Ns'
+ P2*As - Ns*Cr + 4*alpha*P2 < 0];
    end
end
```


3.5.3. A H_∞ alapú zavarelnyomás

A (2.89)-(2.91) egyenletek alapján a zavar elnyomásának elérése érdekében szükség van γ^2 minimalizálására [7].

γ^2 minimalizálása a következő feltételek mellett:

$\mathbf{X}, \mathbf{M}_1, \dots, \mathbf{M}_l$

$$\mathbf{X} \succ 0, \quad (3.63)$$

$$\begin{bmatrix} \left(\begin{array}{c} -\frac{1}{2} \{ \mathbf{X} \mathbf{A}_i^T - \mathbf{M}_j^T \mathbf{B}_i^T + \mathbf{A}_i \mathbf{X} - \mathbf{B}_i \mathbf{M}_j \} \\ + \mathbf{X} \mathbf{A}_j^T - \mathbf{M}_i^T \mathbf{B}_j^T + \mathbf{A}_j \mathbf{X} - \mathbf{B}_j \mathbf{M}_i \end{array} \right) - \frac{1}{2} (\mathbf{E}_i + \mathbf{E}_j) \frac{1}{2} \mathbf{X} (\mathbf{C}_i + \mathbf{C}_j)^T \\ -\frac{1}{2} (\mathbf{E}_i + \mathbf{E}_j)^T & \gamma^2 \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \frac{1}{2} (\mathbf{C}_i + \mathbf{C}_j) \mathbf{X} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \preceq \mathbf{0}, \quad (3.64)$$

ahol $\mathbf{M}_i = \mathbf{F}_i \mathbf{X}$, valamint

```
E = cell(1,R);
for r = 1:R
    Er = sdpvar(n, m, 'full');
end

lmi = lmistruct(Sc, n);
gammamin = lmiasymdecaymin(lmi);
lmi = lmiasym(lmi,gammamin);
F = lmisolve(lmi);
```

Az algoritmusban foglalt LMI feltételek a következők:

```
for r = 1:R
    for s = r+1:R
        Ar = reshape(A(r,:,:), [n n]);
        As = reshape(A(s,:,:), [n n]);
        Br = reshape(B(r,:,:), [n m]);
        Bs = reshape(B(s,:,:), [n m]);
        Cr = reshape(C(r,:,:), [p n]);
        Cs = reshape(C(s,:,:), [p n]);
        lmi.F = lmi.F + [(-1/2*(X*Ar' - Ms'*Br' + Ar*X - Br*Ms + X*As' - Mr'*Bs'
+ As*X - Bs*Mr)) -1/2*(Er+Es) 1/2*X*(Cr+Cs)'; -1/2*(Er+Es)';
(gamma*gamma)*eye(lmi.m) zero1; 1/2*(Cr+Cs)*X zero2 eye(lmi.p)]>=0];
    end
end
ahol
zero1 = [0 0];
zero2 = [0;0];
```

4. fejezet

A validált alkalmazások bemutatása

A kutatáshoz és a tézisek bebizonyításához két nemlineáris dinamikus rendszert vizsgálok azért, hogy bebizonyítsam, hogy a módszer általánosan alkalmazható. Továbbá szemléltetem, hogy nem biztos, hogy a kevésbé komplex TP-modell eredményez jobb szabályozót az LMI módszerével.

4.1. TORA rendszer

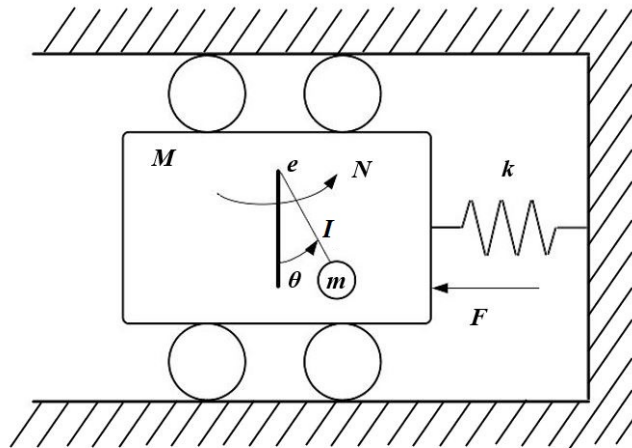
A TORA rendszer (4.1. ábra) egy olyan mechanikus rendszer, amelyben az oszcillátor egy falhoz rögzített kocsiból áll, amelyet egy lineáris rugó köt össze a fallal. A kocsni tömege M , a lineáris rugó merevsége k . A kocsi korlátozva van abból a szempontból, hogy csak egydimenziós mozgásra képes, tehát a mozgás vízszintes irányban történik, így nem kell figyelembe venni a gravitációs erőket. A kocsihoz rögzített próbatest működtető szerkezet a kocsi tömegközéppontja körül helyezkedik el, amely lengő mozgást végez. Ezt egy egyenáramú motor működteti, amelynek mozgása olyan erőt fejt ki, amely felhasználható a translációs rezgések csillapítására. A próbatest tömege m , a forgáspont és a próbatest középpontja közötti távolsága e , a tehetetlenségi nyomaték I , F a kocsira ható zavaró erő, az N vezérlőnyomaték a próbatestre hat, θ pedig a forgó próbatest szöghelyzete.

4.1.1. A TORA rendszer qLPV-modellje

Adottak a nemlineáris rendszer paraméterei, illetve a mozgásegyenletek a [23, 73, 105] publikációk alapján. A rendszer állapotváltozói felírhatók:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi(t) \\ \dot{\xi}(t) \\ \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{bmatrix}. \quad (4.1)$$

A (4.1) és a mozgásegyenletek [23] alapján a TORA rendszer qLPV reprezentációja



4.1. ábra. A TORA rendszer [23]

a következő:

$$\mathbf{A}(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} 0 & 10 & 0 \\ \frac{-1}{f(x_3(t))} & 00 & \frac{\varepsilon x_4(t) \sin(x_3(t))}{f(x_3(t))} \\ 0 & 00 & 1 \\ \frac{\varepsilon \cos(x_3(t))}{f(x_3(t))} & 00 & \frac{-\varepsilon^2 x_4(t) \sin(x_3(t)) \cos(x_3(t))}{f(x_3(t))} \end{bmatrix}, \quad (4.2)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-\varepsilon \cos(x_3(t))}{f(x_3(t))} \\ 0 \\ \frac{1}{f(x_3(t))} \end{bmatrix}, \quad (4.3)$$

ahol

$$f(x_3(t)) = 1 - \varepsilon^2 \cos^2(x_3(t)), \quad (4.4)$$

valamint $p_1(t) = x_3(t)$ és $p_2(t) = x_4(t)$, illetve:

$$\xi \triangleq \sqrt{\frac{M+m}{I+me^2}} g,$$

$$\varepsilon \triangleq \frac{me}{\sqrt{(I+me^2)(M+m)}},$$

$\mathbf{S}(\mathbf{p}(t))$ pedig a rendszermátrix:

$$\mathbf{S}(\mathbf{p}(t)) = [\mathbf{A}(\mathbf{p}(t))\mathbf{B}(\mathbf{p}(t))], \quad (4.5)$$

ahol $\mathbf{A}(\mathbf{p}(t))$ és $\mathbf{B}(\mathbf{p}(t))$ mátrix elemeit a HOSVD módszerével határoztam meg numerikus úton. Az említett módszerhez CNO típusú súlyfüggvényeket alkalmazom. A TORA rendszer állapotai mérhetőek.

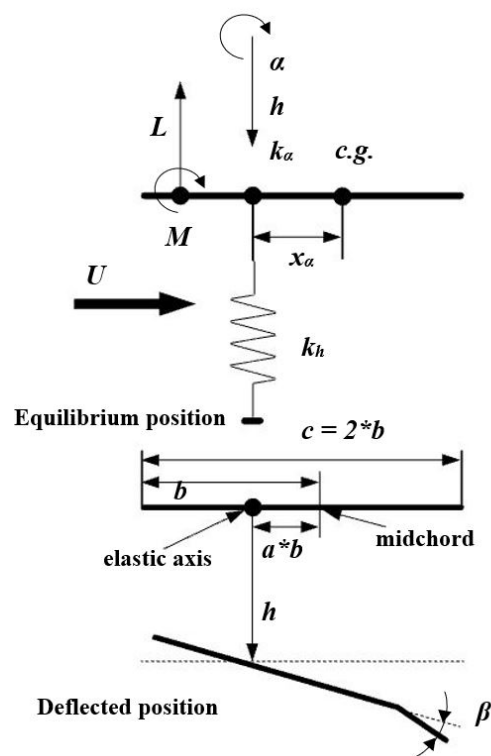
4.2. Kétszabadságfokú repülőgépszárny modell (NATA)

A vizsgált mechanikai modell (4.2. ábra) egy kétdimenziós, tipikus szárnyprofil vízszintes irányú áramlásban, amelynek mozgását két független szabadsági fok határozza

meg: függőleges elmozdulás (merülés), illetve a dőlésszög. Az aeroelasztikus szárny technológiája integrálja a szárny aerodinamikáját, irányítását és szerkezetét, hogy nagy sebességnél szabályozza a szárny aeroelasztikus csavarodását. Az aeroelasztikus szárny dinamikus viselkedésének vizsgálata elsőkörben a divergenciára és a kormánylap reverzálására épül.

A korábbi kutatások [9–14, 19] a TP-modelltranszformáció témában vizsgálták a 2 és 3 szabadságfokú aeroelasztikus repülőgépszárny modellt (NATA), mint valós mérnöki probléma. Jelen dolgozat további TP-modelleket mutat be a nemlinearitás csökkentésével, illetve a transzformációs tér változtatásával.

A modell részletes leírása, valamint a mozgás egyenletek megtalálhatók a [10, 11, 190] publikációkban. Minden TP-modell esetében azonos 137×137 rácssűrűséget alkalmaznak.



4.2. ábra. Kétdimenziós lapos lemez szárnyprofil (NATA) [11]

4.2.1. A repülőgépszárny qLPV-modellje

A modell állapotváltozói a következők:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(t) \\ \alpha(t) \\ \dot{h}(t) \\ \dot{\alpha}(t) \end{bmatrix}, \quad (4.6)$$

ahol $x_1(t)$ a merülési elmozdulás és $x_2(t)$ a dőlési elmozdulás, $x_3(t)$ a merülési sebesség és $x_4(t)$ a dőlési sebesség. A modell qLPV állapotter reprezentációja:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{S}(\mathbf{p}(t)) \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{u}(t) \end{bmatrix}, \quad (4.7)$$

ahol $\mathbf{p}(t) \in \mathbb{R}^2$ paraméter vektor elemei

$$\mathbf{p}(t) = \begin{bmatrix} U(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}. \quad (4.8)$$

$U(t)$ szabad áramlási sebesség egy külső paraméter. A rendszermátrix

$$\mathbf{S}(\mathbf{p}(t)) = [\mathbf{S}_1(\mathbf{p}(t))\mathbf{S}_2(\mathbf{p}(t))], \quad (4.9)$$

ahol

$$\mathbf{S}_1(\mathbf{p}(t)) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -k_1 - k_2 U^2(t) - p(k_\alpha(x_2(t))) & \\ -k_3 - k_4 U^2(t) - q(k_\alpha(x_2(t))) & \end{bmatrix}, \quad (4.10)$$

$$\mathbf{S}_2(\mathbf{p}(t)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -c_1(U(t)) - c_2(U(t))g_3 U^2(t) & \\ -c_3(U(t)) - c_4(U(t))g_4 U^2(t) & \end{bmatrix}, \quad (4.11)$$

ahol a paraméterek és a matematikai kifejezések a következők [10, 11, 190]:

$$d = m(I_\alpha - m x_\alpha^2 b^2), \quad z = \frac{1}{2} - a, \quad k_1 = \frac{I_\alpha k_h}{d}, \quad (4.12)$$

$$k_2 = \frac{I_\alpha \rho b c_{l_\alpha} + m x_\alpha b^3 \rho c_{m_\alpha}}{d}, \quad k_3 = \frac{-m x_\alpha b k_h}{d}, \quad (4.13)$$

$$k_4 = \frac{-m x_\alpha b^2 \rho c_{l_\alpha} - m \rho b^2 c_{m_\alpha}}{d}, \quad (4.14)$$

$$p(k_\alpha(x_2(t))) = \frac{-m x_\alpha b}{d} k_\alpha(x_2(t)), \quad (4.15)$$

$$q(k_\alpha(x_2(t))) = \frac{m}{d} k_\alpha(x_2(t)), \quad (4.16)$$

$$k_\alpha(x_2(t)) = 2.82(1.0 - 22.1x_2(t) + 1315.5x_2^2(t) + 8580x_2^3(t) + 17289.7x_2^4(t)) \quad (4.17)$$

$$c_1(U(t)) = (I_\alpha(c_h + \rho U(t)bc_{l_\alpha}) + \quad (4.18)$$

$$+ m x_\alpha \rho U(t)c_{m_\alpha})/d, \quad (4.19)$$

$$c_2(U(t)) = (I_\alpha \rho U(t)b^2 c_{l_\alpha}(1/2 - a) - m x_\alpha b c_\alpha + \quad (4.20)$$

$$+ m x_\alpha \rho U(t)b^4 c_{m_\alpha}(1/2 - a))/d, \quad (4.21)$$

$$c_3(U) = (-m x_\alpha b c_h - m x_\alpha \rho U(t)b^2 c_{l_\alpha} - \quad (4.22)$$

$$- m \rho U(t)b^2 c_{m_\alpha})/d, \quad (4.23)$$

$$c_4(U) = (m c_\alpha - m x_\alpha \rho U(t)b^3 c_{l_\alpha}(1/2 - a) - \quad (4.24)$$

$$- m \rho U(t)b^3 c_{m_\alpha}(1/2 - a))/d, \quad (4.25)$$

$$g_3 = (-I_\alpha \rho b c_{l_\beta} - m x_\alpha b^3 \rho c_{m_\beta})/d, \quad (4.26)$$

$$g_4 = (m x_\alpha b^2 \rho c_{l_\beta} + m \rho b^2 c_{m_\beta})/d, \quad (4.27)$$

ahol $a = -0.673$, $b = 0.135$, $k_h = 2844.4$, $c_h = 27.43$, $c_\alpha = 0.036$, $\rho = 1.225$, $c_{l_\alpha} = 6.28$, $c_{l_\beta} = 3.358$, $c_{m_\alpha} = (0.5+a)*c_{l_\alpha}$, $m = 12.387$, $c_{m_\beta} = -0.635$, $x_\alpha = -0.3533 - a$, $I_\alpha = 0.065$.

II. rész

Új tudományos eredmények

5. fejezet

A paraméterter változtatása

A korábbi kutatások [2, 3, 12, 14] bemutatták, hogy a TP-modelltranszformáció és az LMI-alapú szabályozó tervezési technikák együttes alkalmazása könnyedén megvalósítható numerikus úton. Nincs szükség analitikus levezetésre, így a szabályozó tervezése kevésbé időigényes. Ezek a kutatások elsősorban az antecedens fuzzy halmazok alakját, tehát a csúcsrendszerek által meghatározott konvex burkot és a fuzzy szabályok számát vizsgálják.

Jelen fejezetben bemutatom a nemlinearitás csökkentését a bemenetek változtatásán (5.1. ábra) keresztül, továbbá a két rendszer új TP-modell változatait. Mindkét példa esetében öt-öt TP-modellt írtam fel. A TP transzformáció során minden egyes példára azonos 137×137 sűrűségű rácsot választok.

5.1. A nemlineáris tulajdonság redukálása

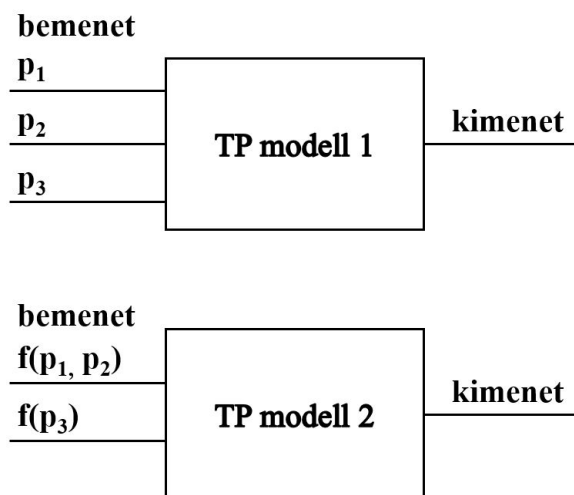
Számos tudományos és mérnöki területen találkozhatunk nemlineáris dinamikus rendszerekkel, amelyek a szabályozási paramétereiktől függenek. Az adott szabályozási paramétertől függő nemlineáris dinamikus rendszerek vizsgálatában a stabilitáselemzés és a kapcsolódó nemlineáris viselkedés teszti lehetővé a nemlineáris rendszerek validálását és jellemzését.

A TP-modellnek végtelen számú változata van, amelyek módosíthatják a fuzzy szabályok számát, az antecedens és a konzekvens halmazokat a jobb szabályozási teljesítőképesség elérése érdekében. Adott nemlineáris dinamikus rendszerek (pl. TORA, NATA) nemlineáris tulajdonságának csökkentése, vagy eltávolítása lehetséges a paraméterter változtatásával. A paraméterek definiálása során különböző TP-modellek kerülnek meghatározásra. Ezek a TP-modellek az LMI-alapú szabályozóval együttesen alkalmazva befolyásolják a szabályozó működését és annak tulajdonságait. A TP-modellek változatai különböző számú bemenettel, vagy bemenetek kombinációjával rendelkeznek. A dolgozatban a nemlineáris parametrikus állapotter qLPV-modellek TP-modelltranszformációját hajtom végre numerikus úton a nemlinearitás csökkentése és a paraméterter változtatása mellett. Ehhez a matematikai nemlineáris egyenletek bonyolultságának csökkentésére van szükség.

A TP-modellek átalakításának kulcsszerkezete az [57] által kidolgozott komplexitás csökkentési technikán alapul, amely bemutat egy szinguláris érték alapú módszert adott fuzzy szabályhalmaz csökkentésére.

A módszer képes megváltoztatni a bemenetek számát, illetve a nemlinearitás átala-

kítását a fuzzy szabályok és a bemeneti dimenziók között. Ezek a jellemzők jelentősen növelik a TP-struktúra modellezési képességét, lehetővé téve a komplexitás további csökkentését és erőteljesebb szabályozási optimalizálás megvalósítását.



5.1. ábra. Ugyanazon TP-modell bemenetének változatai [5]

Jelen kutatásban a nemlinearitás csökkentése a nemlineáris tulajdonságok eltávolításával valósul meg: a rendszer rendjének csökkentésével és a lehető legtöbb nemlinearitás kiküszöbölésével az egyenletrendszerből. pl. $\sin(x_3(t))$, $\cos(x_3(t))$ stb. A TP-modellből alternatív TP-modelleket lehet létrehozni, amelynek előnye, hogy az alternatív modelleknek más számú bemenete lehet, illetve a TP-modell bemenetei az eredeti bemenetek függvényeként adhatók meg (5.1. ábra). A dimenziók rangja csökkenthető, ha nemlineáris bemenetet határozunk meg a TP-modellekre, ez pedig csökkenti az antecedensek számát és új konvex burkot definiál a csúcsrendszerek számára. Mivel az LMI tervezési módszerek érzékenyek, így további dimenziók keletkezhetnek az optimalizálás során. A TP-modelltranszformáció korábbi változataival módosítható a csúcsrendszerek konvex burok alakja a jobb szabályozási teljesítőképesség elérése érdekében. A nemlinearitás csökkentése és a bemenetek számának módosítása a konvex burok paramétervektorának dimenziójának változtatását eredményezi. Következésképpen a csúcsrendszerek által meghatározott konvex burok manipulációját egy új térbe vetítve.

Feltételezzük a következő függvényt:

$$\mathcal{S}(\mathbf{p}) \in \mathbb{R}^{O^K}, \quad \mathbf{p} \in \Omega^p \subset \mathbb{R}^N, \quad (5.1)$$

a TP-modelltranszformáció változatának végrehajtása a következő struktúrát eredményezi:

$$\forall \mathbf{p} : \mathcal{S}(\mathbf{p}) = \mathcal{S} \boxtimes_{n=1}^N \mathbf{w}_n(p_n), \quad (5.2)$$

ezáltal lehetőség van változtatni az antecedens fuzzy halmazok számát és alakját, a konzekvenst, amelyet lehetséges alternatív $\mathbf{b} \in \Omega^b \subset \mathbb{R}^M$ bemeneti térbe transzformálni, ahol \mathbf{p} és \mathbf{b} között kapcsolat áll fent:

$$\forall \mathbf{p} : \mathcal{S}(\mathbf{p}) = \mathcal{T}(\mathbf{b}) = \mathcal{T} \boxtimes_{m=1}^M \mathbf{v}_m(b_m), \quad (5.3)$$

ahol a $\mathbf{p} \in \Omega^p$ bemeneti teret helyettesíti $\mathbf{b} \in \Omega^b$. Ezután a TP-modelltranszformációt és a szabályozótervezés lépéseit a 2.3.3. és 2.4. fejezetek szerint kell alkalmazni.

A nemlineáris tulajdonság csökkentésével növekszik a megoldhatósági régió, amely a szabályozó teljesítőképességét kedvezően befolyásolja.

5.1.1. A TORA rendszer TP-modell változatai

TORA TP-modell 1

Az első modell a TORA TP-modelltranszformációjának „eredeti” modellje, ahol a paramétertér $p_1(t) = x_3(t)$ és $p_2(t) = x_4(t)$, amely modell szerepel a [23] publikációban. A transzformációs tér pedig $\Omega = [-0.8, 0.8] \times [-0.8, 0.8]$. A TP-modelltranszformáció pedig a következő:

$$\mathbf{S}(\mathbf{p}(t)) = \mathcal{S} \boxtimes_{n=1}^2 \mathbf{w}_n(p_n(t)), \quad (5.4)$$

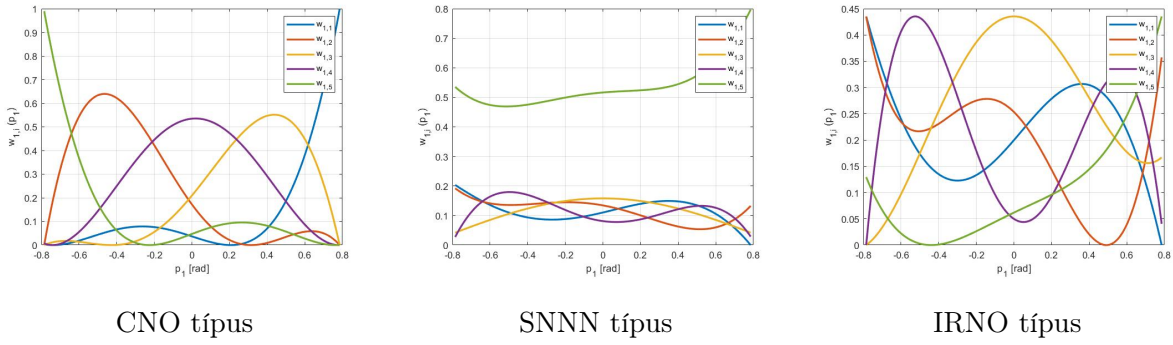
ahol $w_{1,i}(p_1)$ és $w_{2,j}(p_2)$ CNO, SNNN és IRNO típusú súlyfüggvényeket az Ω térben az 5.2. és az 5.3. ábrákon illusztráltam. A $p_1(t)$ és $p_2(t)$ paraméterekhez a HOSVD módszerrel létrehoztam a $w_{1,1}$, $w_{1,2}$, $w_{1,3}$, $w_{1,4}$, $w_{1,5}$, illetve $w_{2,1}$ és $w_{2,2}$ súlyfüggvényeket numerikus úton. Ezután a TP-modelltranszformációval numerikusan előállítottam az LTI rendszereket, amelyeknek száma $5 \times 2 = 10$:

$$\dot{\mathbf{x}} \cong \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^2 w_i(x_3) w_j(x_4) (\mathbf{A}_{i,j} \mathbf{x} + \mathbf{B}_{i,j} u). \quad (5.5)$$

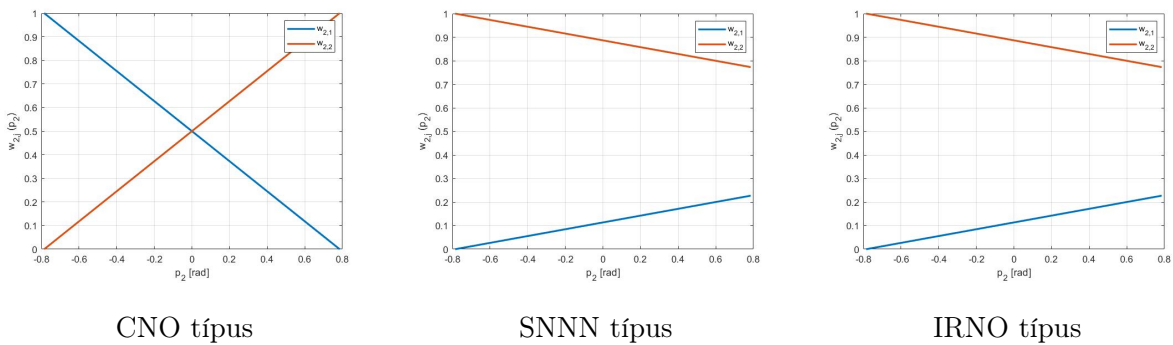
A HOSVD módszere alkalmas nemcsak a súlyfüggvények és az LTI rendszerek, hanem a szinguláris értékek előállítására is. Így tehát a keletkező \mathbf{sv} szinguláris értékeket az 5.1. táblázat tartalmazza. Továbbá az 5.2. és az 5.3. ábrákon látható, hogy a rendszer felbomlik 5 súlyfüggvényre a θ szöghelyzetben és 2 súlyfüggvényre a $\hat{\theta}$ szögsebességben.

5.1. táblázat. Szinguláris értékek TORA TP-modell 1 esetében

$\mathbf{sv}\{1,1\}$	$\mathbf{sv}\{1,2\}$
280.9899	281.0149
5.5948	5.5954
3.7498	-
0.0851	-
0.0365	-



5.2. ábra. A TORA TP-modell 1 súlyfüggvényei p_1 paraméterre



5.3. ábra. A TORA TP-modell 1 súlyfüggvényei p_2 paraméterre

A HOSVD és a TP transzformáció alkalmazása által keletkező 10 LTI rendszer a következő:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1.00000 & 0 \\ -1.0201 & 0 & 0 \\ 0.1435 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.1435 \\ 1.0201 \end{bmatrix}, \quad (5.6)$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1.00000 & 0 \\ -1.0201 & 0 & 0 \\ 0.1435 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.1435 \\ 1.0201 \end{bmatrix}, \quad (5.7)$$

$$\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1.00000 & 0 \\ -1.0304 & 0 & 0 \\ 0.1809 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.1809 \\ 1.0304 \end{bmatrix}, \quad (5.8)$$

$$\mathbf{A}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1.00000 & 0 \\ -1.0304 & 0 & 0 \\ 0.1809 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.1809 \\ 1.0304 \end{bmatrix}, \quad (5.9)$$

$$\mathbf{A}_5 = \begin{bmatrix} 0 & 1.00000 & 0 \\ -1.0308 & 0 & 0 \\ 0.1801 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.1801 \\ 1.0308 \end{bmatrix}, \quad (5.10)$$

$$\mathbf{A}_6 = \begin{bmatrix} 0 & 1.00000 & 0 \\ -1.0308 & 0 & 0 & 0.1080 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0000 \\ 0.1801 & 0 & 0 & -0.0198 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.1801 \\ 0 \\ 1.0308 \end{bmatrix}, \quad (5.11)$$

$$\mathbf{A}_7 = \begin{bmatrix} 0 & 1.00000 & 0 \\ -1.0204 & 0 & 0 & 0.1137 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0000 \\ 0.1443 & 0 & 0 & -0.0161 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_7 = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.1443 \\ 0 \\ 1.0204 \end{bmatrix}, \quad (5.12)$$

$$\mathbf{A}_8 = \begin{bmatrix} 0 & 1.00000 & 0 \\ -1.0204 & 0 & 0 & -0.1137 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0000 \\ 0.1443 & 0 & 0 & 0.0161 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_8 = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.1443 \\ 0 \\ 1.0204 \end{bmatrix}, \quad (5.13)$$

$$\mathbf{A}_9 = \begin{bmatrix} 0 & 1.00000 & 0 \\ -1.0488 & 0 & 0 & 0.0081 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0000 \\ 0.2276 & 0 & 0 & -0.0011 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_9 = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.2276 \\ 0 \\ 1.0488 \end{bmatrix}, \quad (5.14)$$

$$\mathbf{A}_{10} = \begin{bmatrix} 0 & 1.00000 & 0 \\ -1.0488 & 0 & 0 & -0.0081 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0000 \\ 0.2276 & 0 & 0 & 0.0011 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_{10} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.2276 \\ 0 \\ 1.0488 \end{bmatrix}. \quad (5.15)$$

Az LTI rendszereket a továbbiakban az LMI módszerének alkalmazása során használok fel szintén numerikus úton.

Jelen modell nemlinearitását azonban lehetséges csökkenteni, ha új paraméterter kerül meghatározásra. A továbbiakban több TP-modellt mutatok be, ahol csökken a nemlineáris tulajdonság.

TORA TP-modell 2

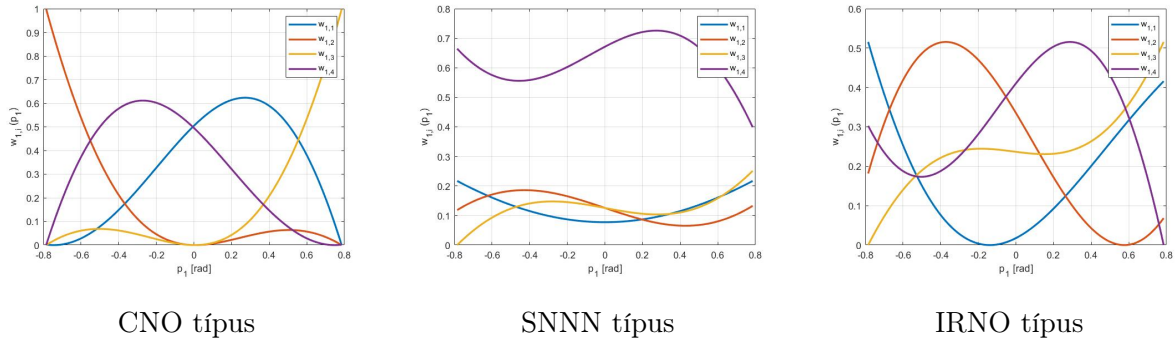
Tehát a modell nemlinearitásának csökkentése érdekében szükség van egy új paraméterter definiálására; $p_1(t) = x_3(t)$, $p_2(t) = x_4(t)$, $p_3(t) = \frac{1}{f(x_3(t))}$. Azonban ennek a lépésnek köszönhetően egy új dimenzió keletkezik. A transzformációs tér pedig $\Omega = [-0.8, 0.8] \times [-0.8, 0.8] \times [1, 1.05]$. A HOSVD módszerének alkalmazása után $4 \times 2 \times 2 = 16$ LTI rendszer jön létre:

$$\dot{\mathbf{x}} \cong \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 w_i(x_3) w_j(x_4) w_k \left(\frac{1}{f(x_3)} \right) (\mathbf{A}_{i,j,k} \mathbf{x} + \mathbf{B}_{i,j,k} u). \quad (5.16)$$

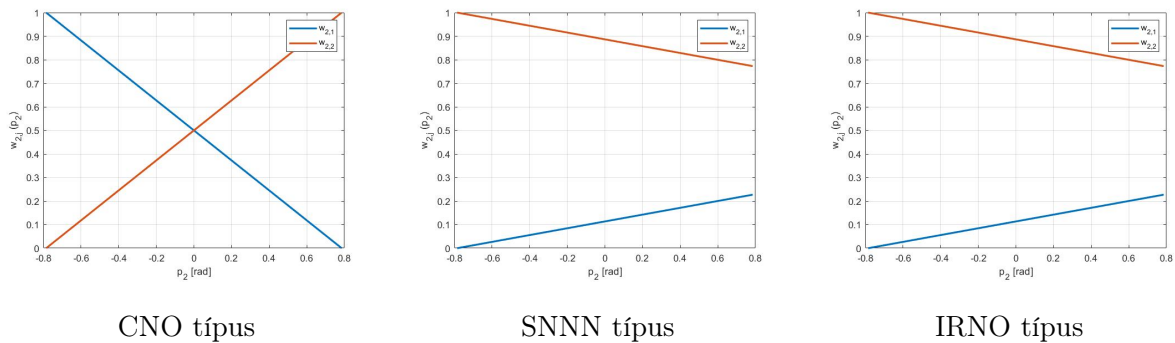
A TP-modell struktúra ebben az esetben a következő:

$$\mathbf{S}(\mathbf{p}(t)) = \mathbf{T}(\mathbf{p}(t)) = \mathcal{T} \boxtimes_{n=1}^3 \mathbf{w}_n(p_n(t)). \quad (5.17)$$

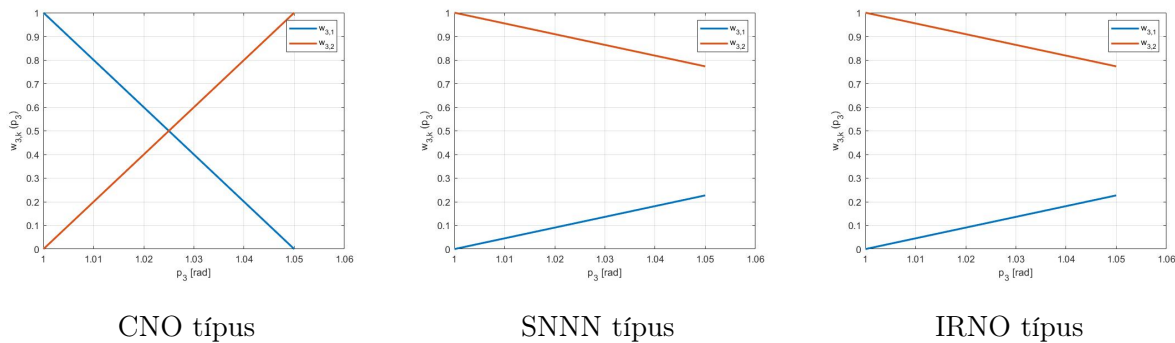
A keletkező súlyfüggvényeket az 5.4.-5.6. ábrákon szemléltetem. Látható, hogy az első dimenzióban a különböző típusú súlyfüggvények esetén 4 súlyfüggvény keletkezett $p_1(t)$ paraméterre: $w_{1,1}$, $w_{1,2}$, $w_{1,3}$, $w_{1,4}$. Ezenkívül $p_2(t)$ és $p_3(t)$ paraméterek esetén a



5.4. ábra. A TORA TP-modell 2 súlyfüggvényei p_1 paraméterre



5.5. ábra. A TORA TP-modell 2 súlyfüggvényei p_2 paraméterre



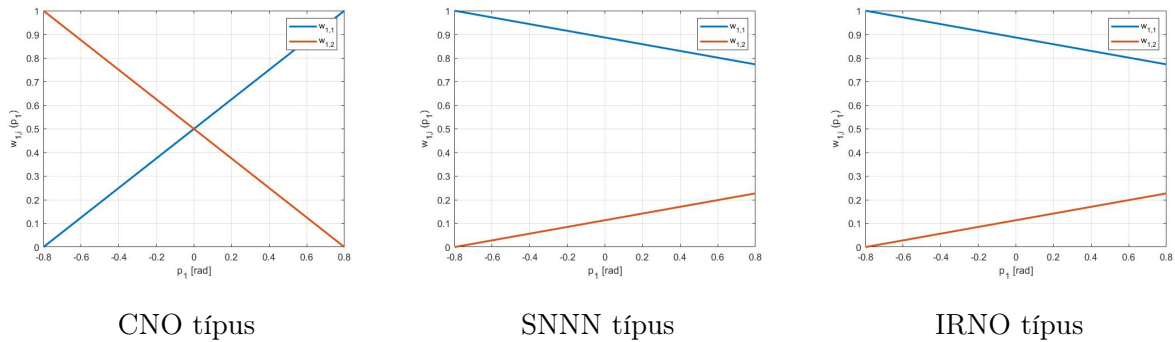
5.6. ábra. A TORA TP-modell 2 súlyfüggvényei p_3 paraméterre

második dimenzióban $w_{2,1}$ és $w_{2,2}$, a harmadik dimenzióban $w_{3,1}$, $w_{3,2}$ súlyfüggvények jöttek létre.

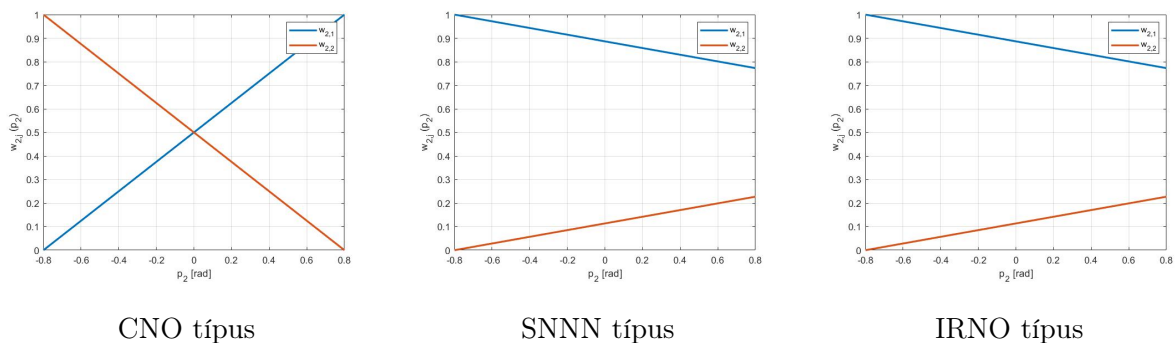
Elmondható, hogy a nemlinearitás csökkent a TP-modell 1-hez képest, viszont az új dimenzió keletkezésével további két súlyfüggvény jött létre. A súlyfüggvények komplexitása is csökkent, azonban a nemlinearitás még tovább csökkenthető.

TORA TP-modell 3

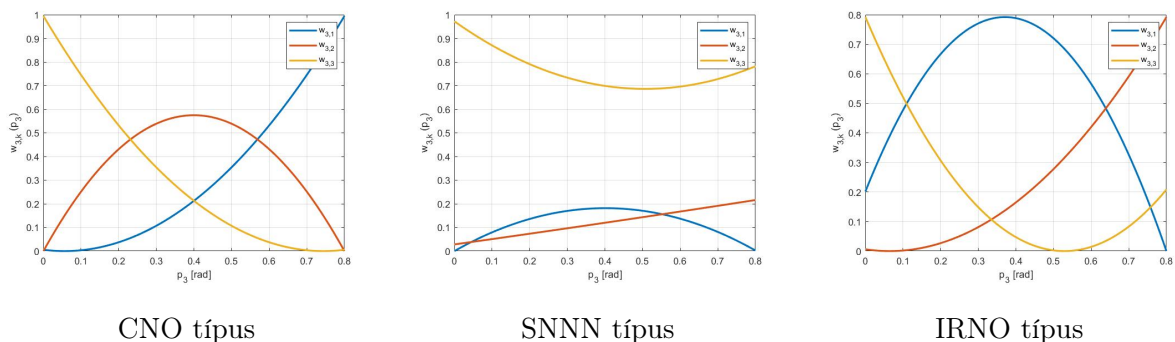
A nemlinearitás és az első dimenzió komplexitásának további csökkentése érdekében az új paraméterek: $p_1(t) = \sin(x_3(t))$, $p_2(t) = x_4(t)$ és $p_3(t) = \cos(x_3(t))$, illetve $\Omega =$



5.7. ábra. A TORA TP-modell 3 súlyfüggvényei p_1 paraméterre



5.8. ábra. A TORA TP-modell 3 súlyfüggvényei p_2 paraméterre



5.9. ábra. A TORA TP-modell 3 súlyfüggvényei p_3 paraméterre

$[-0.8, 0.8] \times [-0.8, 0.8] \times [0, 0.8]$. A keletkező LTI rendszerek száma $2 \times 2 \times 3 = 12$:

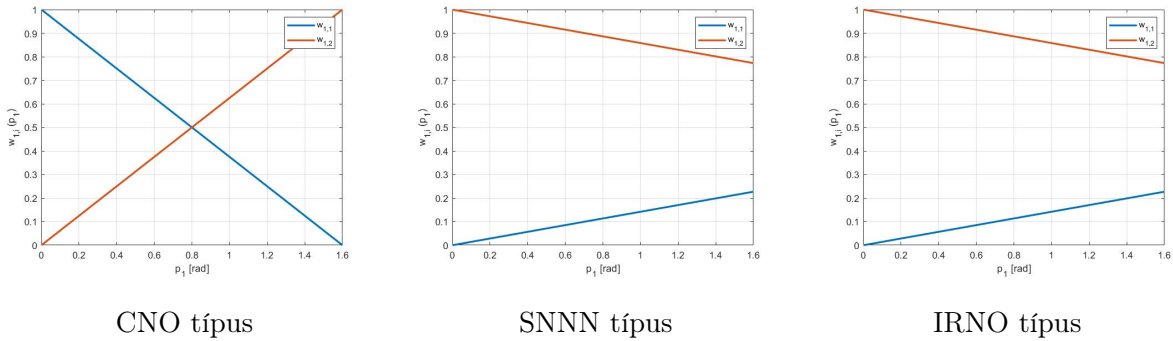
$$\dot{\mathbf{x}} \cong \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^3 w_i(\sin(x_3)) w_j(x_4) w_k(\cos(x_3)) (\mathbf{A}_{i,j,k} \mathbf{x} + \mathbf{B}_{i,j,k} u), \quad (5.18)$$

a TP-modell struktúra pedig

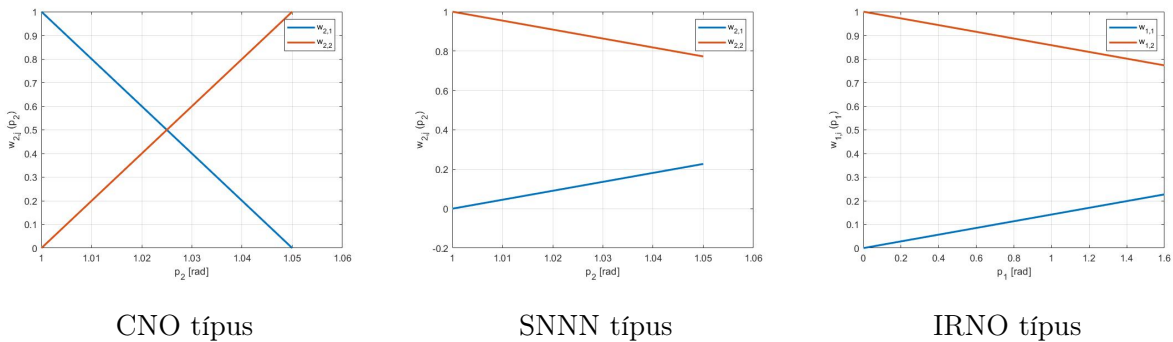
$$\mathbf{S}(\mathbf{p}(t)) = \mathbf{T}(\mathbf{p}(t)) = \mathcal{T} \boxtimes_{n=1}^3 \mathbf{w}_n(p_n(t)). \quad (5.19)$$

A különböző típusú súlyfüggvényeket az 5.7.-5.9. ábrán mutatom be. A $p_1(t)$ paraméterhez a $w_{1,1}, w_{1,2}$, $p_2(t)$ paraméterhez a $w_{2,1}, w_{2,2}$ súlyfüggvények tartoznak. Látható, hogy a TP-modell 2 példához viszonyítva tovább csökkent a súlyfüggvények száma az első

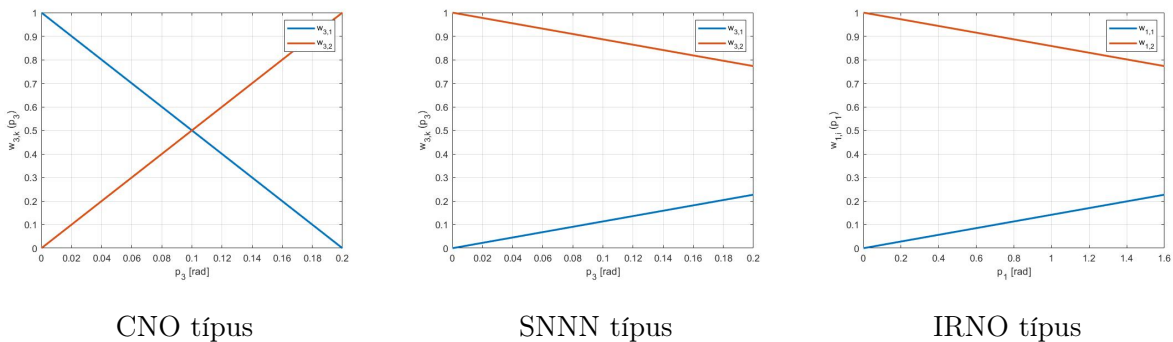
dimenzióban. Továbbá a második dimenzióban azonos maradt a súlyfüggvények száma, illetve a $p_2(t)$ paraméter is változatlan. Habár $p_3(t)$ paraméterhez tartozó súlyfüggvények száma három, azonban a súlyfüggvények maximális száma bármely dimenzióban három, tehát a nemlinearitás ismét csökkent.



5.10. ábra. A TORA TP-modell 4 súlyfüggvényei p_1 paraméterre



5.11. ábra. A TORA TP-modell 4 súlyfüggvényei p_2 paraméterre



5.12. ábra. A TORA TP-modell 4 súlyfüggvényei p_3 paraméterre

TORA TP-modell 4

A negyedik modell esetében a paraméterek $p_1(t) = x_4(t)\sin(x_3(t))$, $p_2(t) = \frac{1}{f(x_3(t))}$ és $p_3(t) = \varepsilon\cos(x_3(t))$, illetve a transzformációs tér $\Omega = [0, 1.6] \times [1, 1.05] \times [0, 0.2]$. A

TP-modelltranszformáció végrehajtása után $2 \times 2 \times 2 = 8$ LTI rendszer keletkezik:

$$\dot{\mathbf{x}} \cong \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 w_i(x_4)(\sin(x_3))w_j \left(\frac{1}{f(x_3)} \right) w_k(\varepsilon \cos(x_3))(\mathbf{A}_{i,j,k}\mathbf{x} + \mathbf{B}_{i,j,k}u), \quad (5.20)$$

amely TP-modell szerkezetének leírása a következő:

$$\mathbf{S}(\mathbf{p}(t)) = \mathbf{T}(\mathbf{p}(t)) = \mathcal{T} \boxtimes_{n=1}^3 \mathbf{w}_n(p_n(t)). \quad (5.21)$$

A CNO, SNNN és IRNO típusú súlyfüggvényeket az 5.10.-5.12. ábrán illusztrálom, ahol $p_1(t)$, $p_2(t)$, és $p_3(t)$ paraméterek $w_{1,1}$, $w_{1,2}$, $w_{2,1}$, $w_{2,2}$ és $w_{3,1}$, $w_{3,2}$ súlyfüggvényei láthatók.

Összehasonlítva az előző három TP-moddal, a nemlinearitás csökkentésének eredménye jól látszik a súlyfüggvények ábráin. A súlyfüggvények nemlineáris tulajdonsága jelentősen csökkent az előző 3 TP-modellhez képest. Ennek következtében a TP-modell 4 egy kevésbé összetett modellnek tekinthető.

TORA TP-modell 5

Jelen modell esetében az alkalmazott paraméterek $p_1(t) = \frac{x_4(t)\sin(x_3(t))}{f(x_3(t))}$, $p_2(t) = \frac{1}{f(x_3(t))}$ és $p_3(t) = \cos(x_3(t))$. A transzformációs tér pedig $\Omega = [0, 1.6] \times [1, 1.05] \times [0, 1]$. A keletkező LTI rendszerek száma pedig $2 \times 2 \times 2 = 8$:

$$\dot{\mathbf{x}} \cong \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 w_i \left(\frac{x_4 \sin(x_3)}{f(x_3)} \right) w_j \left(\frac{1}{f(x_3)} \right) w_k(\varepsilon \cos(x_3))(\mathbf{A}_{i,j,k}\mathbf{x} + \mathbf{B}_{i,j,k}u), \quad (5.22)$$

amely alapján a TP-modell struktúra

$$\mathbf{S}(\mathbf{p}(t)) = \mathbf{T}(\mathbf{p}(t)) = \mathcal{T} \boxtimes_{n=1}^3 \mathbf{w}_n(p_n(t)). \quad (5.23)$$

A keletkezett különböző típusú $w_{1,1}$, $w_{1,2}$, $w_{2,1}$, $w_{2,2}$ és $w_{3,1}$, $w_{3,2}$ súlyfüggvényeket az 5.13.-5.15. ábrákkal szemléltetem mindhárom paraméterre. Észrevehető, hogy a súlyfüggvények száma megegyezik a TP-modell 4 súlyfüggvényeinek számával. Azonban a nemlinearitás ismét csökkent. A különbség a TP-modell 4-hez képest, hogy a konzekvens eltérő lehet, emiatt a szabályozó tervezése egy alternatív megoldást adhat.

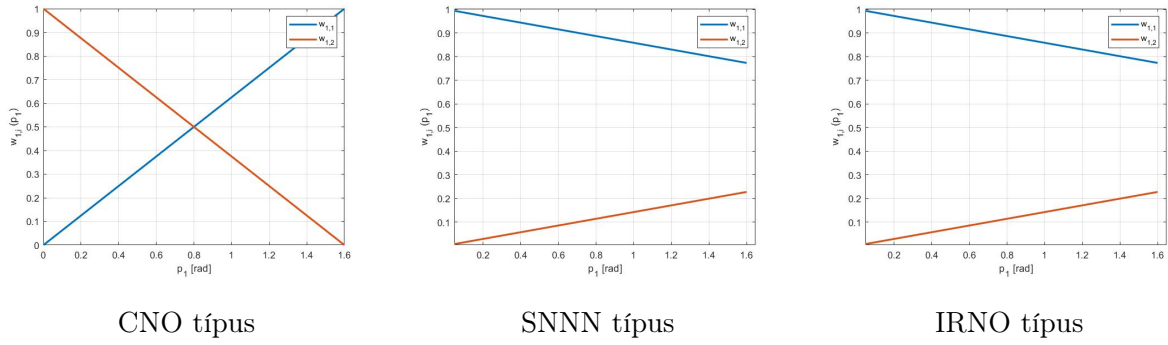
A vizsgált modellek közül a TP-modell 5 lett az egyszerűbb, kevésbé összetett modell. A modellekhez készült szabályozó tervezése pedig a 7. fejezetben található.

5.1.2. A repülőgépszárny TP-modell változatai

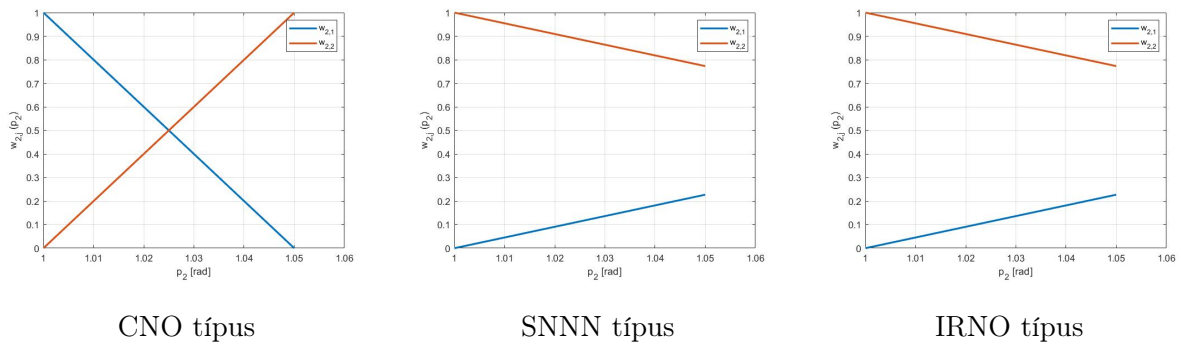
Repülőgépszárny TP-modell 1

Jelen modell a repülőgépszárny TP-modelltranszformációjának „eredeti” verzióját mutatja be, ahol $p_1(t) = U(t)$, $p_2(t) = x_2(t)$ és $\Omega = [14, 25] \times [-0.3, 0.3]$ és amely szerepel a [5, 10, 11, 190] publikációkban. A HOSVD alkalmazása során keletkező LTI rendszerek száma $3 \times 2 = 6$:

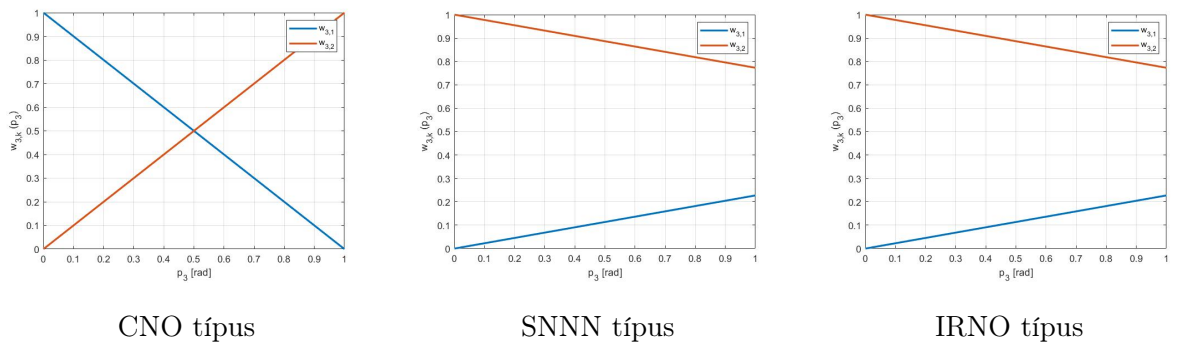
$$\dot{\mathbf{x}} \cong \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 w_i(U)w_j(x_2)(\mathbf{A}_{i,j}\mathbf{x} + \mathbf{B}_{i,j}u), \quad (5.24)$$



5.13. ábra. A TORA TP-modell 5 súlyfüggvényei p_1 paraméterre



5.14. ábra. A TORA TP-modell 5 súlyfüggvényei p_2 paraméterre

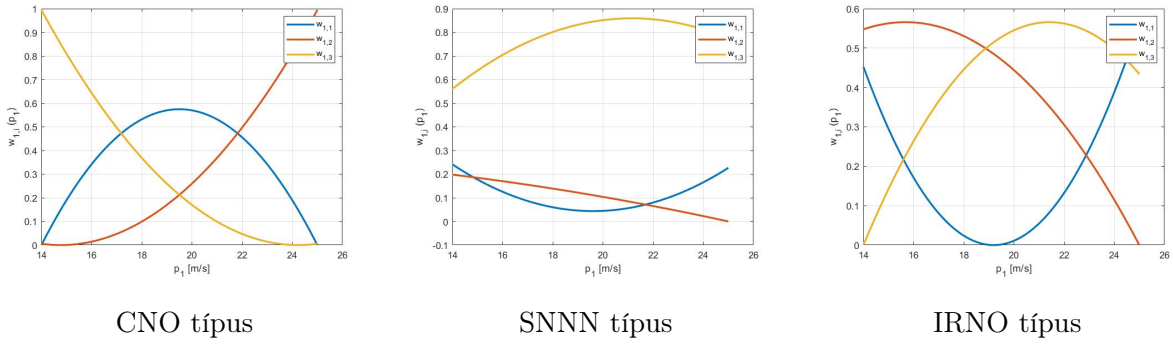


5.15. ábra. A TORA TP-modell 5 súlyfüggvényei p_3 paraméterre

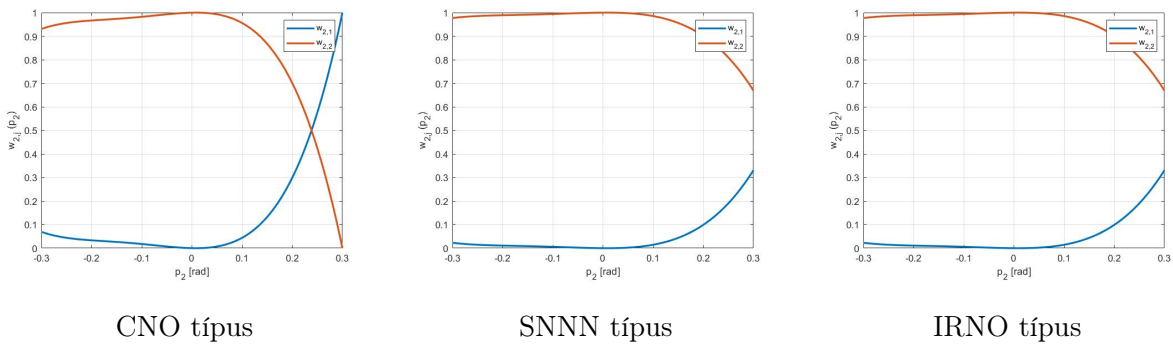
amihez a kapcsolódó szinguláris értékeket az 5.2. táblázat tartalmazza, a TP-modelltranszformáció alakja pedig a következő:

$$\mathbf{S}(\mathbf{p}(t)) = \mathcal{S} \boxtimes_{n=1}^2 \mathbf{w}_n(p_n(t)). \tag{5.25}$$

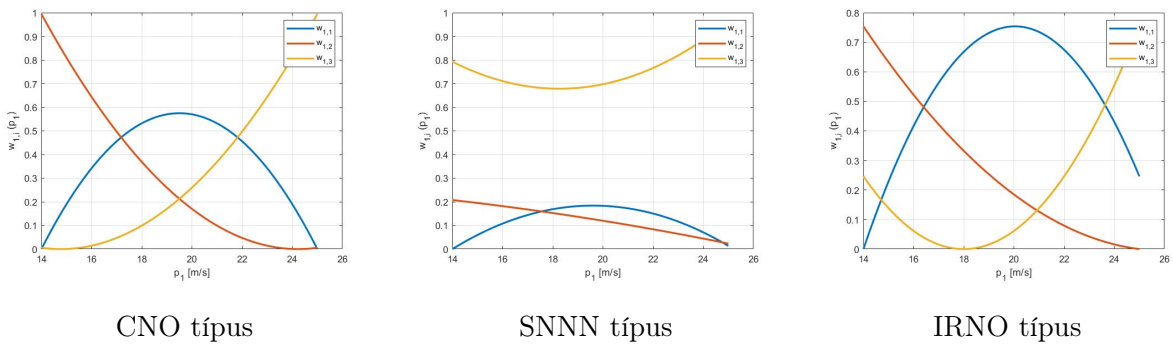
A keletkező CNO, SNN és IRNO típusú súlyfüggvényeket az 5.16. és az 5.17. ábrán mutatom be. Látható, hogy az első dimenzióban a különböző típusú súlyfüggvények esetén három súlyfüggvény keletkezett $p_1(t)$ paraméterre; $w_{1,1}$, $w_{1,2}$, $w_{1,3}$. Ezenkívül $p_2(t)$ paraméter esetén a második dimenzióban $w_{2,1}$ és $w_{2,2}$ súlyfüggvények jöttek létre.



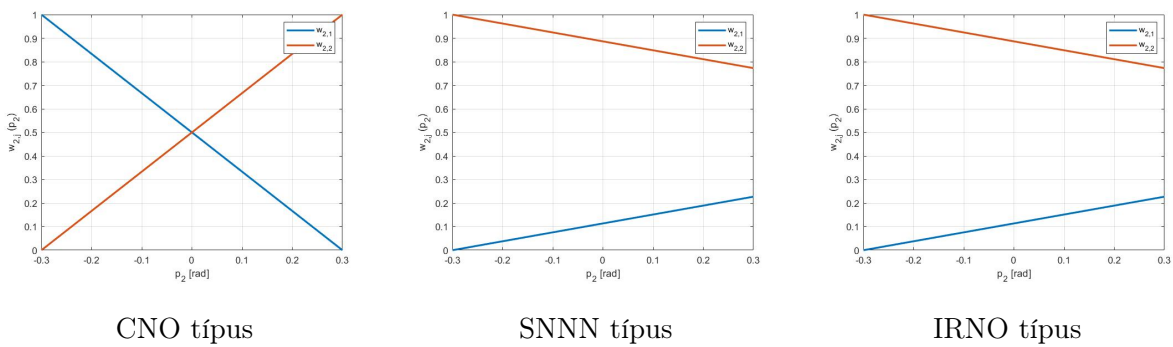
5.16. ábra. A repülőgépszárny TP-modell 1 súlyfüggvényei p_1 paraméterre



5.17. ábra. A repülőgépszárny TP-modell 1 súlyfüggvényei p_2 paraméterre



5.18. ábra. A repülőgépszárny TP-modell 2 súlyfüggvényei p_1 paraméterre



5.19. ábra. A repülőgépszárny TP-modell 2 súlyfüggvényei p_2 paraméterre

5.2. táblázat. Szinguláris értékek a repülőgépszárny TP-modell 1 esetében

$\mathbf{sv}\{1,1\}$	$\mathbf{sv}\{1,2\}$
7.8898×10^5	7.8779×10^5
5.7554×10^3	4.3854×10^4
10.6601	-
2.3552×10^{-9}	-

A HOSVD és a TP transzformáció által keletkező 6 LTI rendszer a következő:

$$\mathbf{A}_1 = 1.0 \times 10^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.01 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.01 \\ -2.3138 & -0.3047 & -0.0390 & -0.0019 \\ 2.7799 & 0.7416 & 0.0889 & 0.0019 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -15.6694 \\ -59.2215 \end{bmatrix}, \quad (5.26)$$

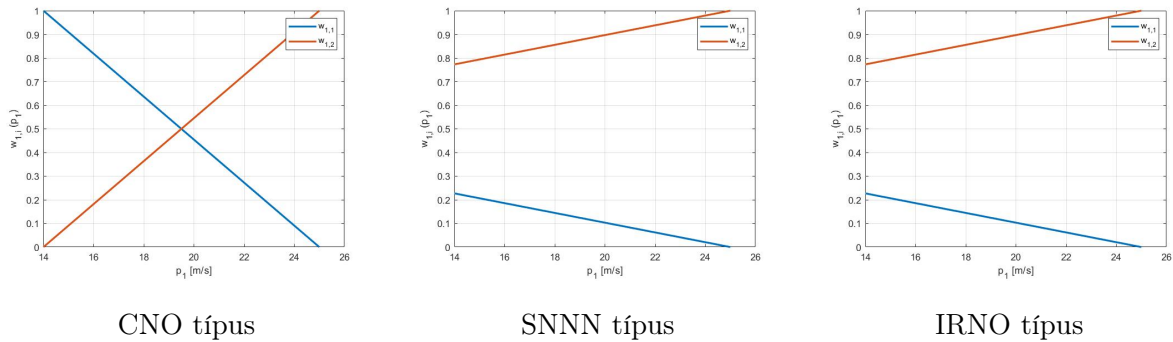
$$\mathbf{A}_2 = 1.0 \times 10^4 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.0001 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0001 \\ -0.0231 & 0.0102 & -0.0003 & -0.0000 \\ 0.0277 & -2.1064 & 0.0008 & 0.0000 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -15.6694 \\ -59.2215 \end{bmatrix}, \quad (5.27)$$

$$\mathbf{A}_3 = 1.0 \times 10^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.01 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.01 \\ -2.3138 & -0.5361 & -0.0438 & -0.0025 \\ 2.7799 & 1.6012 & 0.1067 & 0.0041 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_3 = 1.0 \times 10^2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.2747 \\ -1.0383 \end{bmatrix}, \quad (5.28)$$

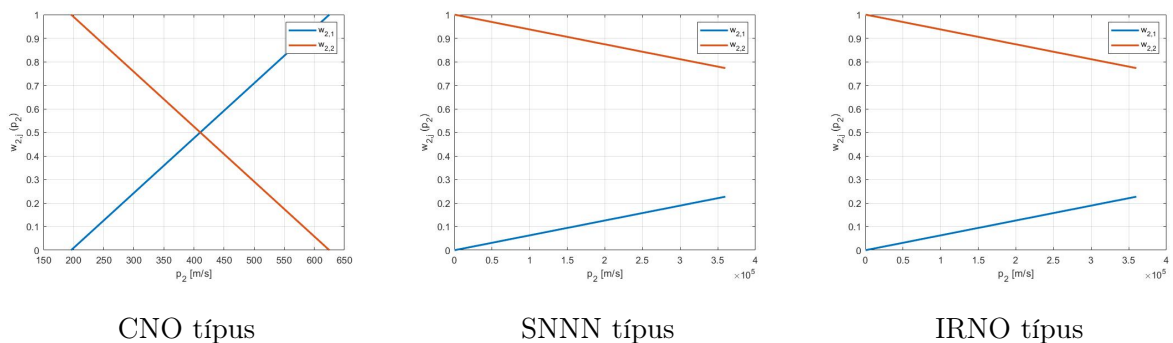
$$\mathbf{A}_4 = 1.0 \times 10^4 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.0001 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0001 \\ -0.0231 & 0.0079 & -0.0004 & -0.0000 \\ 0.0277 & -2.0978 & 0.0010 & 0.0000 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_4 = 1.0 \times 10^2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.2747 \\ -1.0383 \end{bmatrix}, \quad (5.29)$$

$$\mathbf{A}_5 = 1.0 \times 10^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.01 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.01 \\ -2.3138 & -0.1636 & -0.0342 & -0.0014 \\ 2.7799 & 0.2179 & 0.0712 & -0.0001 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -8.4764 \\ -32.0363 \end{bmatrix}, \quad (5.30)$$

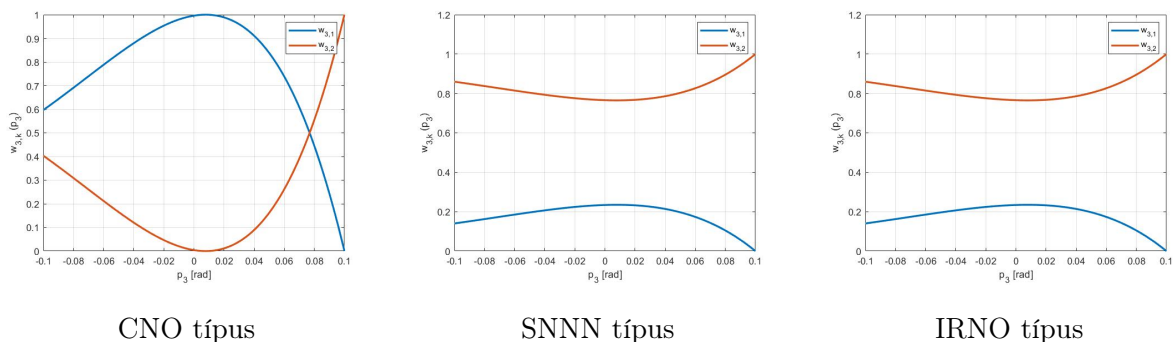
$$\mathbf{A}_6 = 1.0 \times 10^4 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.0001 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0001 \\ -0.0231 & 0.0116 & -0.0003 & -0.0000 \\ 0.0277 & -2.1117 & 0.0007 & 0.0000 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -8.4764 \\ -32.0363 \end{bmatrix}. \quad (5.31)$$



5.20. ábra. A repülőgépszárny TP-modell 3 súlyfüggvényei p_1 paraméterre



5.21. ábra. A repülőgépszárny TP-modell 3 súlyfüggvényei p_2 paraméterre



5.22. ábra. A repülőgépszárny TP-modell 3 súlyfüggvényei p_3 paraméterre

Repülőgépszárny TP-modell 2

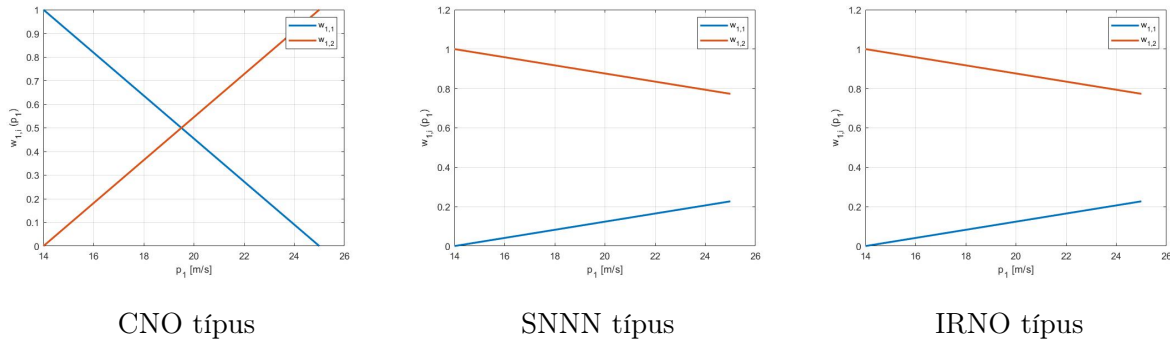
A nemlinearitás csökkentése érdekében az új paramétertér $p_1(t) = U(t)$ és $p_2(t) = k_\alpha(x_2(t))$. A transzformációs tér változatlanul $\Omega = [14, 25] \times [-0.3, 0.3]$. Az LTI rendszerek száma $3 \times 2 = 6$, mint a TP-modell 1 esetében:

$$\dot{\mathbf{x}} \cong \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 w_i(U) w_j(k_\alpha(x_2)) (\mathbf{A}_{i,j} \mathbf{x} + \mathbf{B}_{i,j} u), \quad (5.32)$$

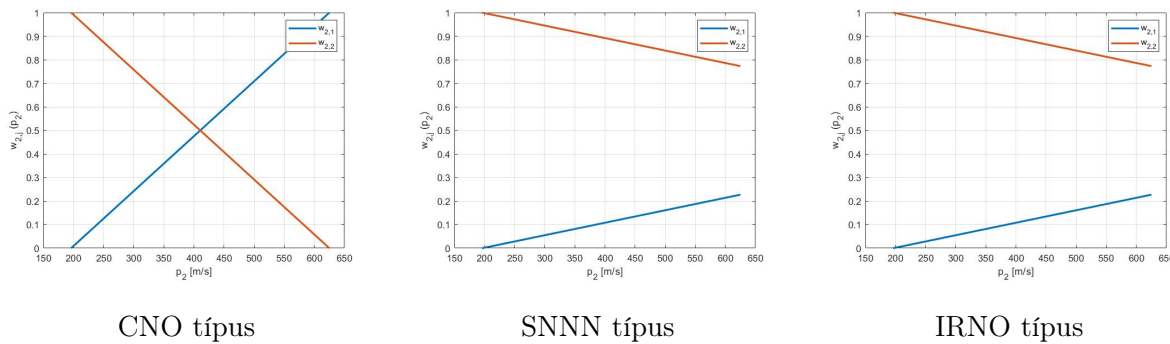
a TP-modelltranszformáció szerkezete pedig

$$\mathbf{S}(\mathbf{p}(t)) = \mathbf{T}(\mathbf{p}(t)) = \mathcal{T} \boxtimes_{n=1}^2 \mathbf{w}_n(p_n(t)). \quad (5.33)$$

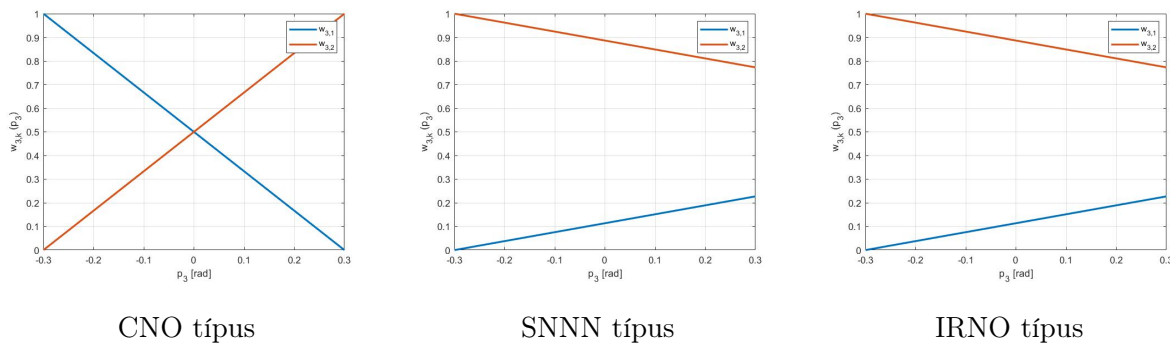
Az 5.18. és az 5.19. ábrán látható, hogy $p_1(t)$ paraméter $w_{1,1}$, $w_{1,2}$, $w_{1,3}$ súlyfüggvényei megegyeznek az előző modellben bemutatott súlyfüggvényekkel. $x_2(t)$ hatással van a rendszermatrixra. A súlyfüggvények nemlineáris tulajdonsága eltávolításra került a második dimenzióból, emiatt az $x_2(t)$ dimenziója átalakult. Látható, hogy a második dimenzió komplexitása csökkent az előző TP modellhez képest.



5.23. ábra. A repülőgépszárny TP-modell 4 súlyfüggvényei p_1 paraméterre



5.24. ábra. A repülőgépszárny TP-modell 4 súlyfüggvényei p_2 paraméterre



5.25. ábra. A repülőgépszárny TP-modell 4 súlyfüggvényei p_3 paraméterre

Repülőgépszárny TP-modell 3

A $p_2(t) = U^2(t)$ új paraméter bevezetése után a paraméterek $p_1(t) = U(t)$, $p_2(t) = U^2(t)$, $p_3(t) = x_2(t)$ és a transzformációs tér $\Omega = [14, 25] \times [14^2, 25^2] \times [-0.3, 0.3]$. A $p_1(t)$, $p_2(t)$ és $p_3(t)$ paraméterekhez tartozó $w_{1,1}$, $w_{1,2}$, $w_{2,1}$, $w_{2,2}$ és $w_{3,1}$, $w_{3,2}$ különböző típusú

súlyfüggvényeket az 5.20.-5.22. ábrákon ismertetem. A keletkező LTI rendszerek száma $2 \times 2 \times 2 = 8$:

$$\dot{\mathbf{x}} \cong \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 w_i(U)w_j(U^2)w_k(x_2)(\mathbf{A}_{i,j,k}\mathbf{x} + \mathbf{B}_{i,j,k}u), \quad (5.34)$$

amely TP-modell struktúrája a következő:

$$\mathbf{S}(\mathbf{p}(t)) = \mathbf{T}(\mathbf{p}(t)) = \mathcal{T} \boxtimes_{n=1}^3 \mathbf{w}_n(p_n(t)). \quad (5.35)$$

Az első kettő dimenzióban a súlyfüggvények kevésbé komplexek és habár egy új dimenzió keletkezett, azonban a súlyfüggvények maximális száma kettő, az LTI rendszerek száma pedig nőtt. A nemlinearitást azonban még ennél tovább lehet csökkenteni.

Repülőgépszárny TP-modell 4

Ez a modell lényegében a TP-modell 2 és 3 eredményeinek a kombinációja. A paraméter tér $p_1(t) = U(t)$, $p_2(t) = U^2(t)$ és $p_3(t) = k_\alpha(x_2(t))$, a transzformációs tér pedig $\Omega = [14, 25] \times [14^2, 25^2] \times [-0.3, 0.3]$. Az LTI rendszerek száma $2 \times 2 \times 2 = 8$:

$$\dot{\mathbf{x}} \cong \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 w_i(U)w_j(U^2)w_k(k_\alpha(x_2))(\mathbf{A}_{i,j,k}\mathbf{x} + \mathbf{B}_{i,j,k}u), \quad (5.36)$$

a TP-modelltranszformáció szerkezete az alábbi:

$$\mathbf{S}(\mathbf{p}(t)) = \mathbf{T}(\mathbf{p}(t)) = \mathcal{T} \boxtimes_{n=1}^3 \mathbf{w}_n(p_n(t)). \quad (5.37)$$

Jelen modellhez tartozó különböző típusú súlyfüggvényeket az 5.23.-5.25. ábrákon ismertetem. Látható, hogy a súlyfüggvények maximális száma ismét kettő, azonban ez a modell lényegesen egyszerűbb, mint az előzőek.

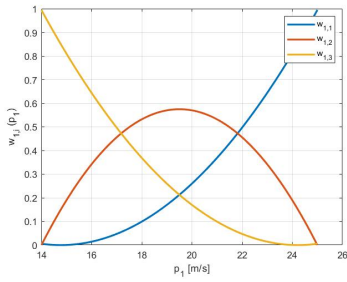
Repülőgépszárny TP-modell 5

A következő modell paraméterei eltérnek az eddigi nemlinearitás csökkentése céljából létrehozott paraméterektől: $p_1(t) = U(t)$, $p_2(t) = 2.82(1 - 22.1x_2(t))$ és $p_3(t) = 2.82(1315.5x_2^2(t) + 8580x_2^3(t) + 17289.7x_2^4(t))$, a transzformációs tér pedig $\Omega = [14, 25] \times [-0.3, 0.3] \times [-0.3, 0.3]$. A paraméterter $k_\alpha(x_2(t))$ elválasztásából adódik, amely hatással van a rendszermatrixra. Az előző modellekhez képest ezáltal több LTI rendszer keletkezik: $3 \times 2 \times 2 = 12$:

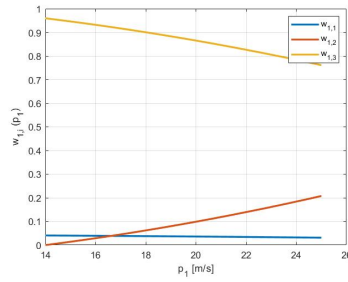
$$\dot{\mathbf{x}} \cong \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 w_i(U)w_j(2.82(1 - 22.1x_2))w_k(2.82(1315.5x_2^2 + 8580x_2^3 + 17289.7x_2^4))(\mathbf{A}_{i,j,k}\mathbf{x} + \mathbf{B}_{i,j,k}u), \quad (5.38)$$

a TP-modelltranszformáció felírása pedig a következő:

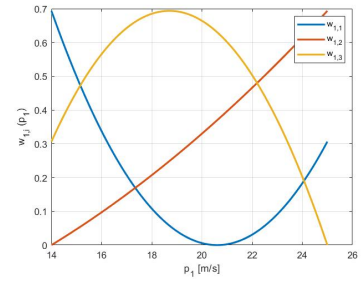
$$\mathbf{S}(\mathbf{p}(t)) = \mathbf{T}(\mathbf{p}(t)) = \mathcal{T} \boxtimes_{n=1}^3 \mathbf{w}_n(p_n(t)), \quad (5.39)$$



CNO típus

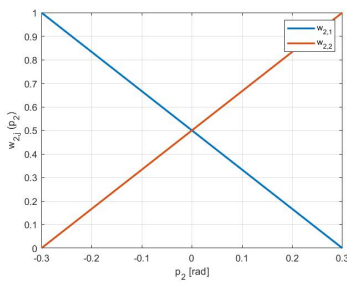


SNNN típus

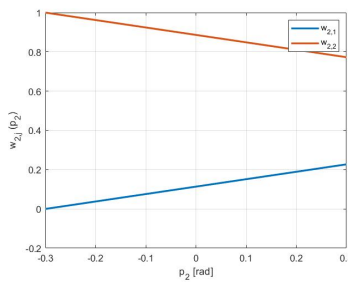


IRNO típus

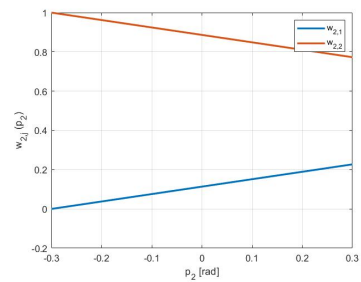
5.26. ábra. A repülőgépszárny TP-modell 5 súlyfüggvényei p_1 paraméterre



CNO típus

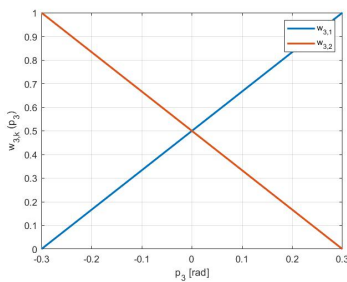


SNNN típus

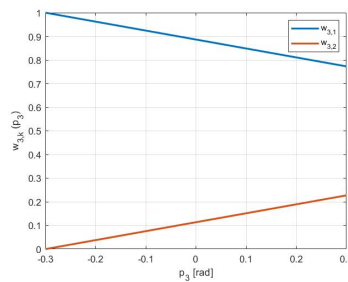


IRNO típus

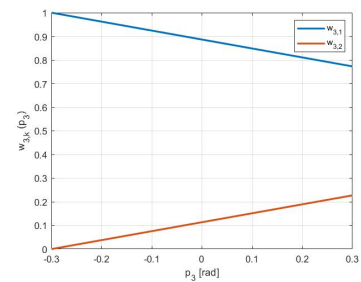
5.27. ábra. A repülőgépszárny TP-modell 5 súlyfüggvényei p_2 paraméterre



CNO típus



SNNN típus



IRNO típus

5.28. ábra. A repülőgépszárny TP-modell 5 súlyfüggvényei p_3 paraméterre

ahol $p_1(t)$, $p_2(t)$ és $p_3(t)$ súlyfüggvényeit az 5.26.-5.28. ábrákon szemléltetem, amelyeken látható, hogy a súlyfüggvények maximális száma három.

Az öt modell közül a TP-modell 4 lett az egyszerűbb, kevésbé összetett modell. A modellekhez készült szabályozó tervezése a 7. fejezetben található.

5.2. A tudományos eredmények összefoglalása

Tézis 1

Kidolgoztam egy módszert, amelynek segítségével csökkenthető a TP-modell nemlineáris tulajdonsága, és a paraméterter változtatásával alternatív TP-modelleket lehet létrehozni. A modellek bemenetei az eredeti bemenetek függvényeként adhatók meg. Elvégeztem a nemlineáris tulajdonság csökkentését két nemlineáris dinamikus rendszer modelljén keresztül, és megvizsgáltam, hogy a különböző nemlinearitásokat a modellből kiemelve, az milyen hatással van a tenzorszorzat alapú transzformációra. Ezáltal lehetőség nyílik a lineáris mátrix egyenlőtlenség alapú szabályozó teljesítőképessége szempontjából kevésbé komplex modellt kiválasztani.

A Tézishez kapcsolódó saját publikációk a következők: [188, 189, 194].

6. fejezet

A transzformációs tér változtatása

Ebben a fejezetben a transzformációs tér változtatását, valamint az LMI módszerének megoldhatósági vizsgálatát mutatom be a TORA rendszeren és a kétszabadságfokú repülőgépszárny modellen keresztül.

6.1. Megoldhatósági vizsgálat az LMI-alapú szabályozó tervezéséhez

Az Ω transzformációs tér változtatása befolyásolhatja az LMI megoldhatósági régiókat. Következésképpen ebben a fejezetben a TORA-, illetve a repülőgépszárny modellek LMI-alapú szabályozójának megoldhatósági régióit mutatom be CNO típusú súlyfüggvény használata mellett. A megoldhatósági vizsgálat azt mutatja meg, hogy létezik-e megoldás az LMI-re, avagy sem. Tekintsük a következő LMI megoldhatósági problémát: $\mathbf{L}(x) < \mathbf{R}(x)$, ahol $\mathbf{R}(x)$ a megoldhatósági rádiusz. A megoldáshoz t minimalizálása szükséges a következő feltétellel: $\mathbf{L}(x) < \mathbf{R}(x) + t\mathbf{I}$. A megoldhatóság érdekében t legjobb értékének negatívnak kell lennie.

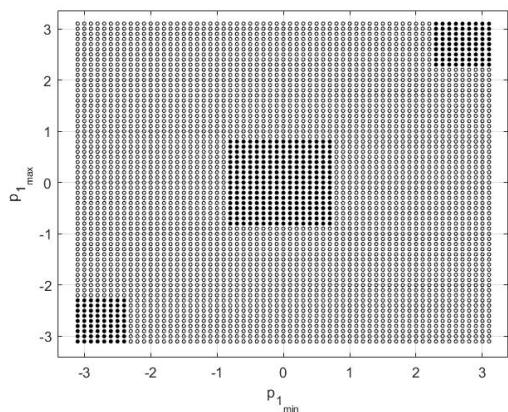
A megoldhatósági vizsgálat az Ω transzformációs térre a szögek esetében (pl. szöghelyzet, szögsebesség) csak a $[-180^\circ, 180^\circ]$ intervallumon történt. A vizsgálat kizárólag egy dimenzióban a transzformációs tér változtatására terjed ki, tehát nem változtattam egyszerre, azonos időpillanatban több dimenzióban a transzformációs teret.

Az ábrákon x -tengely mutatja p_{min} , y -tengely pedig p_{max} paramétereket. Az illusztrációkon bemutatom, hogy az LMI megoldható-e az adott tartományban a különböző dimenziókban. Tehát a vastagon fekete pontokkal jelölt területek a megoldható régiók, az üres karikákkal jelölt terület pedig a nem-megoldható régiók.

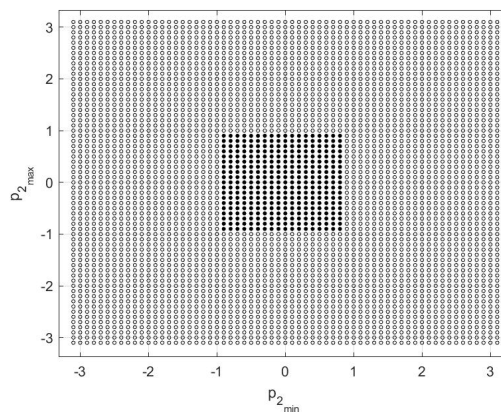
6.1.1. A TORA rendszer megoldhatósági vizsgálata

TORA TP-modell 1

A TP-modell 1 esetben két dimenzió van, a transzformációs tér $\Omega = [-0.8, 0.8] \times [-0.8, 0.8]$, a paraméterter pedig $p_1(t) = x_3(t)$, $p_2(t) = x_4(t)$. A 6.1. ábrán szemléltetem

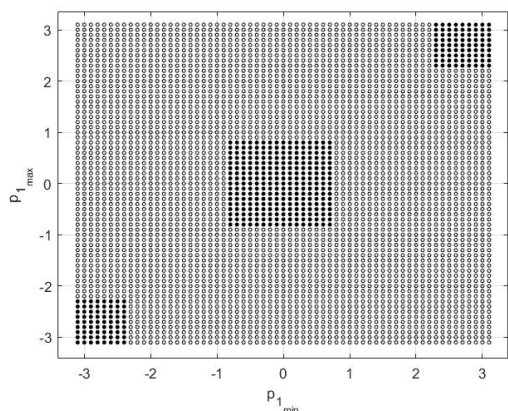


Első eset, $p_1(t)$ paraméterre

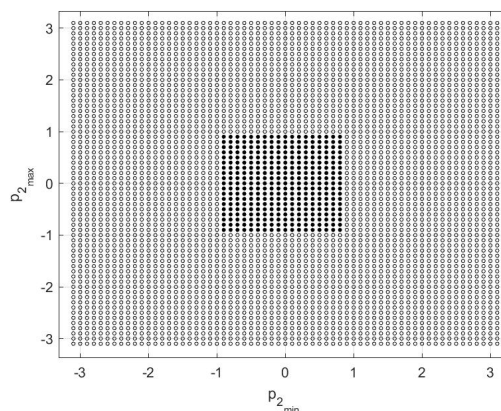


Második eset, $p_2(t)$ paraméterre

6.1. ábra. A TORA TP-modell 1 megoldhatósági régiók



Első eset, $p_1(t)$ paraméterre



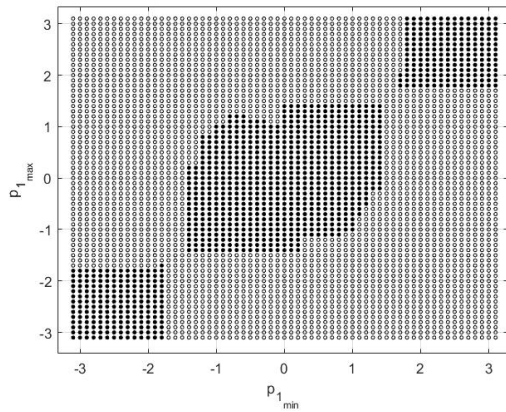
Második eset, $p_2(t)$ paraméterre

6.2. ábra. A TORA TP-modell 2 megoldhatósági régiók

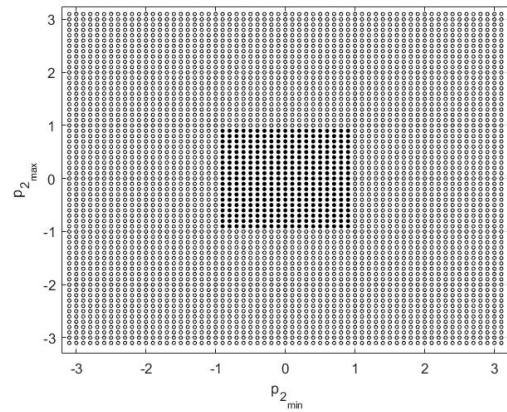
az első esetet, amikor a transzformációs tér az első dimenzióban változik $p_1(t)$ paraméterre, a második dimenzió pedig fix $[-, -] \times [-0.8, 0.8]$ intervallumban. A 6.1. ábrán ugyancsak bemutatom a második esetet is, amikor a transzformációs tér a második dimenzióban változik $p_2(t)$ paraméterre, az első dimenzió pedig fix $[-0.8, 0.8] \times [-, -]$ intervallumban.

TORA TP-modell 2

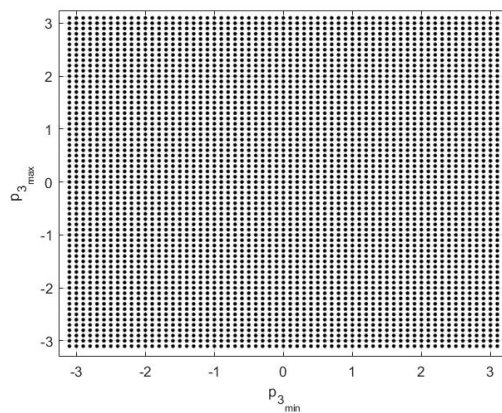
A TORA TP-modell 2 esetén az új paramétertér miatt már három dimenzió van: $\Omega = [-0.8, 0.8] \times [-0.8, 0.8] \times [1, 1.05]$, ahol a paramétertér $p_1(t) = x_3(t)$, $p_2(t) = x_4(t)$, $p_3(t) = \frac{1}{f(x_3(t))}$. Ezáltal kettő lehetséges esetet vizsgálok, amelynek eredménye a 6.2. ábrán látható. Megfigyelhető, hogy az első és a második esetben a megoldhatósági régiók ugyanazok, mint a TP-modell 1 példánál. Az első esetben szintén változik a transzformációs tér az első dimenzióban $p_1(t)$ paraméterre, a második dimenzió pedig fix $[-, -] \times [-0.8, 0.8] \times [1, 1.05]$ intervallumban. A második esetben a transzformá-



Első eset, $p_1(t)$ paraméterre



Második eset, $p_2(t)$ paraméterre



Harmadik eset, $p_3(t)$ paraméterre

6.3. ábra. A TORA TP-modell 3 megoldhatósági régiók

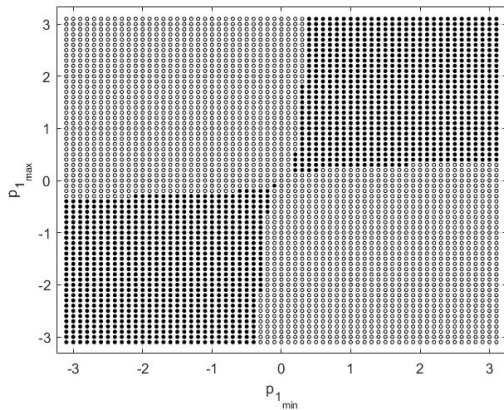
ciós tér a második dimenzióban változik $p_2(t)$ paraméterre, az első dimenzió pedig fix $[-0.8, 0.8] \times [-, -] \times [1, 1.05]$ intervallumban.

TORA TP-modell 3

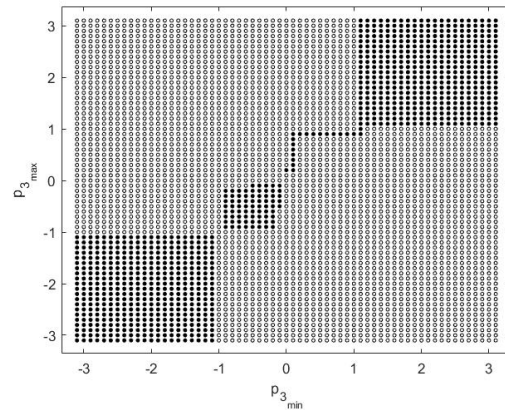
A TORA TP-modell 3 megoldhatósági régióit a 6.3. ábrán illusztrálom. A transzformációs tér $\Omega = [-0.8, 0.8] \times [-0.8, 0.8] \times [0, 0.8]$, a paramétertér pedig $p_1(t) = \sin(x_3(t))$, $p_2(t) = x_4(t)$ és $p_3(t) = \cos(x_3(t))$.

Az első esetben változik a transzformációs tér az első dimenzióban $p_1(t)$ paraméterre $[-, -] \times [-0.8, 0.8] \times [0, 0.8]$ intervallumban. A második esetben bemutatom, hogyan alakul a megoldhatósági régió a második dimenzió változtatásával $[-0.8, 0.8] \times [-, -] \times [0, 0.8]$ intervallumban. A harmadik esetben pedig a harmadik dimenzióban változik a transzformációs tér $[-0.8, 0.8] \times [-0.8, 0.8] \times [-, -]$ intervallumban.

Következésképpen megfigyelhető, hogy a TP-modell 1 és 2 példához képest nőtt a megoldhatósági tartomány, amely azt jelenti, hogy minél jobban csökkent a nemlineáris tulajdonság, annál nagyobb területet fed le a megoldhatósági vizsgálat az LMI-alapú szabályozó tervezése során.

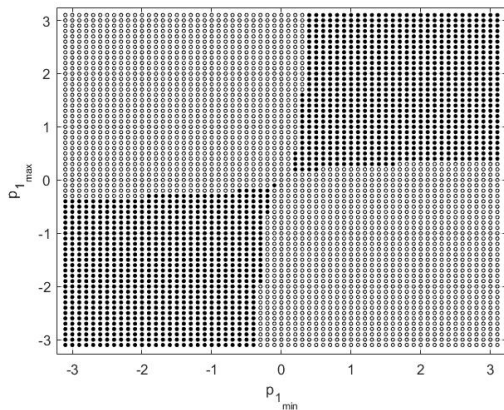


Első eset, $p_1(t)$ paraméterre

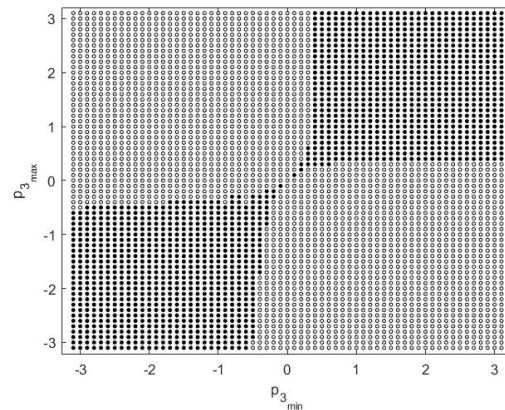


Második eset, $p_3(t)$ paraméterre

6.4. ábra. A TORA TP-modell 4 megoldhatósági régiók



Első eset, $p_1(t)$ paraméterre



Második eset, $p_3(t)$ paraméterre

6.5. ábra. A TORA TP-modell 5 megoldhatósági régiók

TORA TP-modell 4

A negyedik modell esetében a paraméterek $p_1(t) = x_4(t)\sin(x_3(t))$, $p_2(t) = \frac{1}{f(x_3(t))}$ és $p_3(t) = \varepsilon\cos(x_3(t))$, illetve a transzformációs tér $\Omega = [0, 1.6] \times [1, 1.05] \times [0, 0.2]$. A 6.4. ábrán szemléltetem az LMI megoldhatósági régiókat az egyes dimenziókban.

Az első esetben látható, hogy $p_1(t)$ paraméterhez tartozó intervallum változik $[-, -] \times [1, 1.05] \times [0, 0.2]$, amíg a második és a harmadik dimenzió fix marad. A második eset pedig azt mutatja, amint a transzformációs tér változik a harmadik dimenzióban és a másik két dimenzió fix marad: $[0, 1.6] \times [1, 1.05] \times [-, -]$.

Ennek következtében szintén észrevehető, hogy a megoldhatósági régió nőtt az előző TORA modellek esetében. Tehát az LMI-alapú szabályozó ezeken a régiókon belül még megoldható, mert létezik olyan minimum t érték, amelyre az LMI megoldható.

TORA TP-modell 5

Az utolsó módosított változat a TP-modell 5, amely paraméterei $p_1(t) = \frac{x_4(t)\sin(x_3(t))}{f(x_3(t))}$, $p_2(t) = \frac{1}{f(x_3(t))}$ és $p_3(t) = \cos(x_3(t))$. A transzformációs tér pedig $\Omega = [0, 1.6] \times [1, 1.05] \times [0, 1]$.

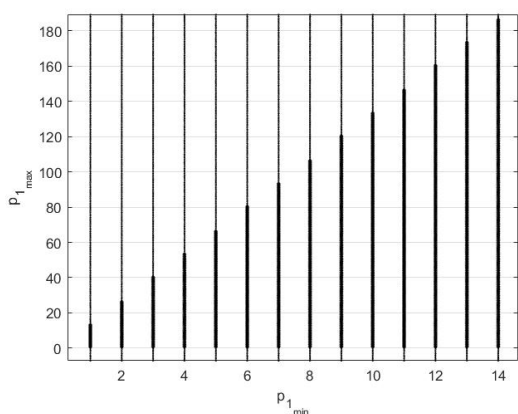
A megoldhatósági régiókat a 6.5. ábrán mutatom be, amely alapján az első eset illusztrálja a transzformációs tér bővítését $[-.] \times [1, 1.05] \times [0, 1]$ intervallumban. A második esetben pedig $p_3(t)$ paraméterhez tartozó tér változik $[0, 1.6] \times [1, 1.05] \times [-, -]$ intervallumban, az első és a második dimenzió pedig fix marad.

Összességében tehát elmondható, hogy az öt TP-modell közül a TORA TP-modell 5 kevésbé komplex a nemlineáris tulajdonságok függvényében, ugyanis a nemlinearitás jelentősen csökkent, az LMI megvalósítási régiói pedig nagyobb területet fednek le, mint a többi négy TP-modell esetében. Így tehát kijelenthető, hogy a modellek közül a TP-modell 5 az egyszerűbb modell.

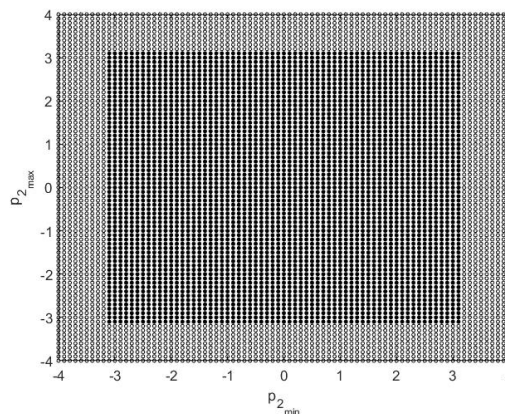
6.1.2. A repülőgépszárny modell megoldhatósági vizsgálata

Repülőgépszárny TP-modell 1

A modell paraméterei $p_1(t) = U(t)$, $p_2(t) = x_2(t)$, a transzformációs tér pedig $\Omega = [14, 25] \times [-0.3, 0.3]$. A 6.6. ábrán szemléltetem a repülőgépszárny TP-modell 1 LMI megoldhatósági régióit. Az első esetben $p_1(t)$ paraméterhez tartozó első dimenzióban változik a transzformációs tér, és a második dimenzió fix $[-, -] \times [-0.3, 0.3]$ intervallumban. Az ábra a vizsgálat alapján $U = [1, 5]$ -től $U = [40, 534]$ -ig illusztrálja a megoldhatósági régiókat. A második esetben látható $\Omega = [14, 25] \times [-, -]$ transzformációs tér bővítése $p_2(t)$ paraméterre.



Első eset, $p_1(t)$ paraméterre

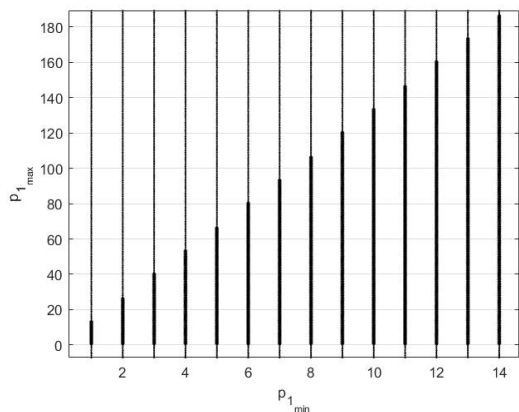


Második eset, $p_2(t)$ paraméterre

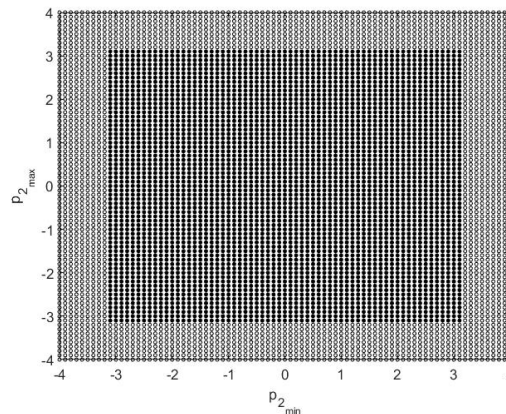
6.6. ábra. A repülőgépszárny TP-modell 1 megoldhatósági régiók

Repülőgépszárny TP-modell 2

A paraméterter $p_1(t) = U(t)$ és $p_2(t) = k_\alpha(x_2(t))$. A transzformációs tér pedig $\Omega = [14, 25] \times [-0.3, 0.3]$. A modell LMI megoldhatósági régióit a 6.7. ábrán illusztrálom,

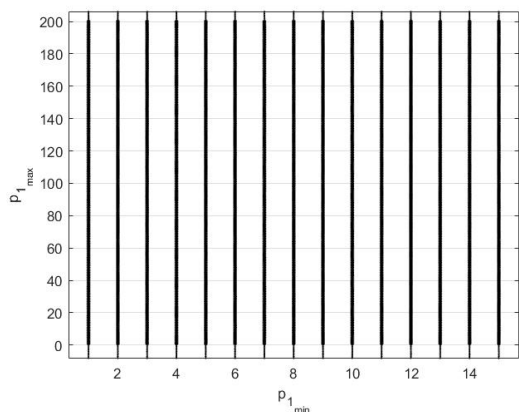


Első eset, $p_1(t)$ paraméterre

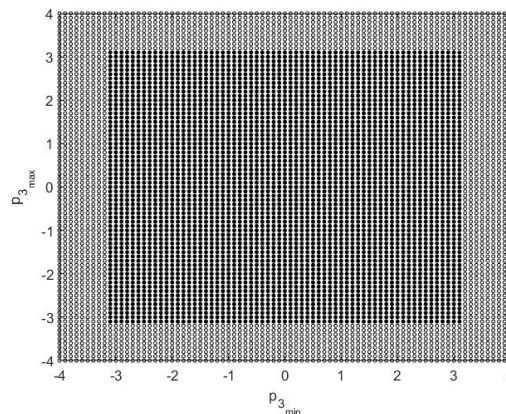


Második eset, $p_2(t)$ paraméterre

6.7. ábra. A repülőgépszárny TP-modell 2 megoldhatósági régiók



Első eset, $p_1(t)$ paraméterre



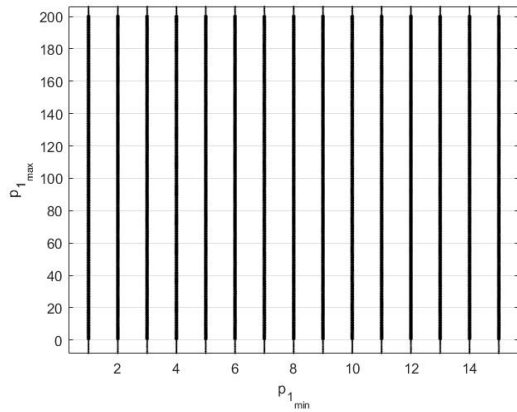
Második eset, $p_3(t)$ paraméterre

6.8. ábra. A repülőgépszárny TP-modell 3 megoldhatósági régiók

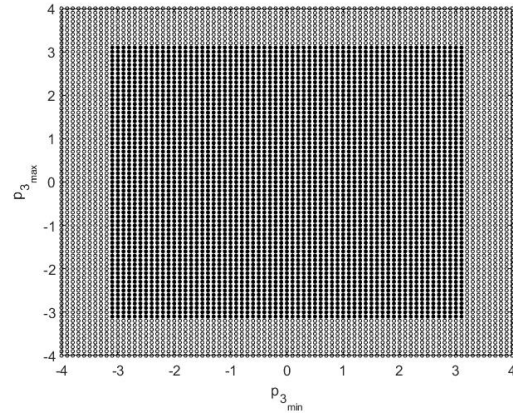
amelyen látható az első eset, amikor a $p_1(t)$ paraméterhez tartozó első dimenzióban változik a transzformációs tér $[-, -] \times [-0.3, 0.3]$ intervallumban, illetve a második eset, amikor $p_2(t)$ paraméterhez tartozó első dimenzióban változik a transzformációs tér $[14, 25] \times [-, -]$ intervallumban. Az ábrák alapján a megoldhatósági régiók egyeznek a vizsgált tartományon belül, azonban a nemlineáris tulajdonság eltávolításra került.

Repülőgépszárny TP-modell 3

Ebben az esetben a paraméterek $p_1(t) = U(t)$, $p_2(t) = U^2(t)$, $p_3(t) = x_2(t)$, a transzformációs tér pedig $\Omega = [14, 25] \times [14^2, 25^2] \times [-0.3, 0.3]$. Az intervallum változtatása a 6.8. ábrán látható, miszerint az első dimenzió változik és a második fix $[-, -] \times [14^2, 25^2] \times [-0.3, 0.3]$ intervallumban, illetve a harmadik dimenzió változik és az első fix $[14, 25] \times [14^2, 25^2] \times [-, -]$ intervallumban. Jól látható, hogy a megoldhatósági régió bővült $p_1(t)$ paraméterre az előző modellekhez képest.

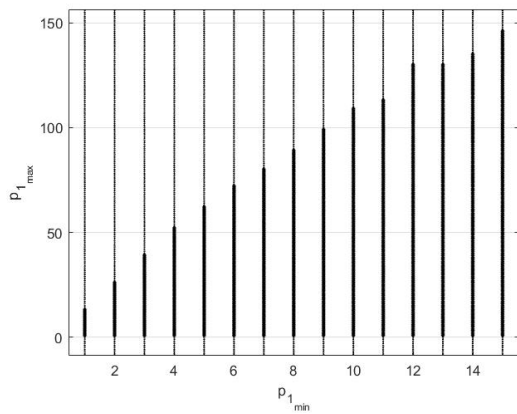


Első eset, $p_1(t)$ paraméterre

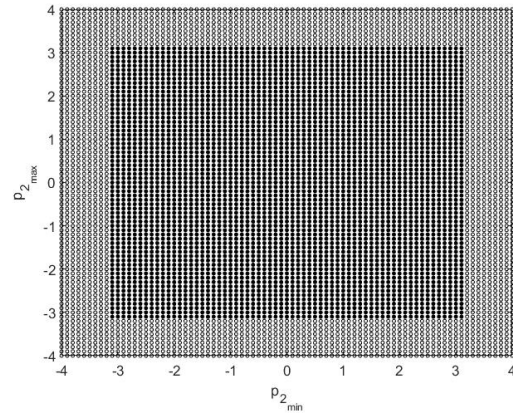


Második eset, $p_3(t)$ paraméterre

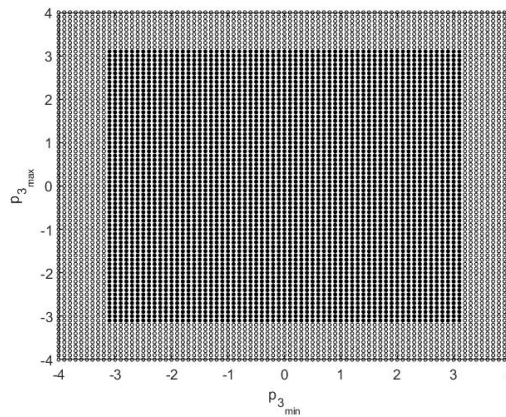
6.9. ábra. A repülőgépszárny TP-modell 4 megoldhatósági régiók



Első eset, $p_1(t)$ paraméterre



Második eset, $p_2(t)$ paraméterre



Harmadik eset, $p_3(t)$ paraméterre

6.10. ábra. A repülőgépszárny TP-modell 5 megoldhatósági régiók

Repülőgépszárny TP-modell 4

A TP-modell 4 esetében a paraméter tér $p_1(t) = U(t)$, $p_2(t) = U^2(t)$ és $p_3(t) = k_\alpha(x_2(t))$, a transzformációs tér pedig $\Omega = [14, 25] \times [14^2, 25^2] \times [-0.3, 0.3]$. Az LMI meg-

oldhatósági vizsgálat szemlélteti, hogy az LMI-alapú szabályozó megvalósítható a 6.9. ábrán bemutatott régiókon belül. Az első esetben $U(t)$ paraméterre való tekintettel változik a transzformációs tér az első dimenzióban, továbbá a második és harmadik dimenzió fix $[-, -] \times [14^2, 25^2] \times [-0.3, 0.3]$ intervallumban. A második eset pedig azt ismerteti, hogy a $[14, 25] \times [14^2, 25^2] \times [-, -]$ transzformációs térben változik a harmadik dimenzió, míg az első és a második dimenzió rögzítve van. Tehát az LMI megoldhatósági vizsgálat alapján elmondható, hogy a megoldhatósági régió ismét nőtt.

Repülőgépszárny TP-modell 5

Az utolsó modell paraméterei eltérnek az eddigi nemlinearitás csökkentése céljából létrehozott paraméterektől: $p_1(t) = U(t)$, $p_2(t) = 2.82(1 - 22.1x_2(t))$ és $p_3(t) = 2.82(1315.5x_2^2(t) + 8580x_2^3(t) + 17289.7x_2^4(t))$, a transzformációs tér pedig $\Omega = [14, 25] \times [-0.3, 0.3] \times [-0.3, 0.3]$. A kapcsolódó LMI megoldhatósági vizsgálatot a 6.10. ábrán illusztrálom. Az első esetben látható, hogy az első dimenzió változik, a második és a harmadik dimenzió fix $[-, -] \times [-0.3, 0.3] \times [-0.3, 0.3]$ intervallumban. A második esetben $p_2(t)$ paraméterre változik a második dimenzió, míg a többi rögzítve van $[14, 25] \times [-, -] \times [-0.3, 0.3]$ intervallumban. A harmadik esetben $p_3(t)$ paraméterre változik a harmadik dimenzió és a többi fix $[14, 25] \times [-0.3, 0.3] \times [-, -]$ intervallumban.

Megfigyelhető, hogy a nemlineáris tulajdonságok csökkentésével az LMI-alapú szabályozó megoldhatósági területei növekednek. Az 5 TP-modell közül a TP-modell 4 az egyszerűbb és kevésbé komplex modell, ugyanis csökkent a nemlineáris tulajdonság, az LMI megoldhatósági régiói pedig nagyobb területet fednek le, mint a többi TP-modell esetében.

Általánosan megfogalmazható, hogy a nemlineáris tulajdonság fokozatos csökkentésével egyre nagyobb területet fed le az LMI megoldhatósági régió, amely az Ω transzformációs tér változtatásával és kiterjesztésével bizonyítható, továbbá a két egymástól független rendszer vizsgálata ezt alátámasztja.

6.2. A tudományos eredmények összefoglalása

Tézis 2

Kidolgoztam a lineáris mátrix egyenlőtlenség megoldhatósági vizsgálatának módszerét CNO típusú súlyfüggvény használatával és a transzformációs tér változtatásával alternatív TP-modellekhez. Ennek következtében a nemlineáris tulajdonság csökkentésével a lineáris mátrix egyenlőtlenség módszer megoldhatósági régiói egyre nagyobb területet fednek le azáltal, ahogy a rendszer nemlineáris tulajdonsága egyre inkább csökken. Bebizonyítottam, hogy azon tenzorszorzat alapú modellek esetében, ahol a súlyfüggvények száma megegyezik, azonban a konzekvens eltérő, a szabályozó alternatív megoldást adhat. A módszert két nemlineáris dinamikus rendszeren validáltam, amely alapján prezentáltam azokat az eseteket, amelyek során a lineáris mátrix egyenlőtlenség még megoldható és a szabályozó, illetve az állapotmegfigyelő tervezhető.

A Tézishez kapcsolódó saját publikációk a következők: [190, 193, 194].

7. fejezet

Aszimptotikus stabilitás vizsgálat

Ebben a fejezetben bemutatom a két nemlineáris dinamikus rendszer TP-modelljeinek asimptotikus stabilitását megvalósító nemlineáris szabályozó, állapotmegfigyelő tervezését és vizsgálatát, valamint a zavarelnyomás tervezését a PDC keretrendszerben.

Az LMI módszere lehetővé teszi a rendszer stabilitásának biztosítását, amennyiben az LMI megoldható a különböző TP-modellek esetében (6.1. fejezet). A jobban teljesítő TP-modellre megterveztem az állapotmegfigyelőt is, és összehasonlítottam az eredményeket. A TP-modellek további vizsgálatát kiegészítettem az alábbiakkal: csillapodási sebesség, bemeneti és kimeneti korlátozások, valamint a zavarok elnyomásának tervezése. Ezután a kapott eredményeket összehasonlítottam és elemeztem.

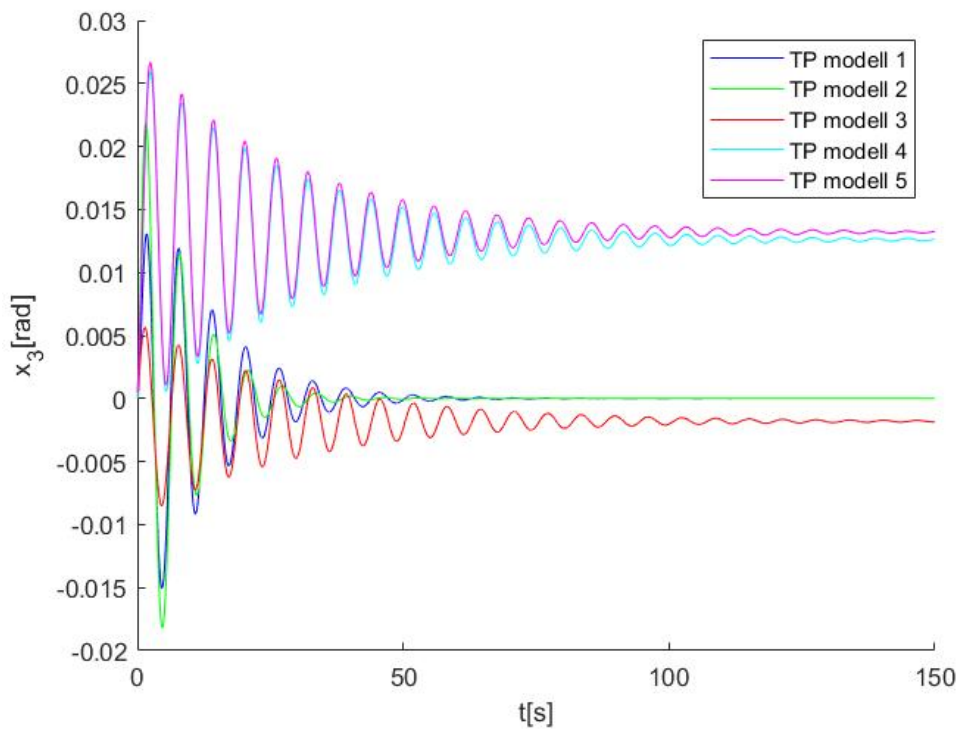
7.1. TORA rendszer stabilitása

A stabilizálás biztosításához a (3.33) és (3.34) LMI feltételeket alkalmaztam a visszacsatoló szabályozóval. A kezdeti érték minden TP-modell esetében $[\xi, \dot{\xi}, \theta, \dot{\theta}]^T = [0.023, 0, 0, 0]^T$. A súlyfüggvények CNO típusúak. A 7.1.-7.3. ábrákon látható a TORA TP-modellek $x_3(t)$ és $x_4(t)$ állapotváltozói, illetve az $u(t)$ szabályozójel. A kék színnek jelölt TP-modell 1 az „eredeti rendszer”. Az ábrákon megfigyelhető, hogy kb. hány másodpercnél kerül stabil állapotba a rendszer. Ezenkívül látható, hogy a különböző TP-modellek a nemlineáris tulajdonságok csökkentésével különböző eredményt adnak az LMI-alapú szabályozóra a stabilitás szempontjából. Azt vizsgálom, hogy melyik TP-modell alkalmazásával érek el jobb eredményt, illetve melyik modell esetében kisebb az oszcilláció mértéke és melyik modell esetében kerül a rendszer hamarabb a stacionárius állapotba. A PDC keretrendszer meghatározza az LTI visszacsatolási erősítéseket minden LTI rendszerre adott TP-modellhez:

$$\mathbf{u}(t) = - \left(\mathcal{F} \boxtimes_{n=1}^N \mathbf{w}_n(\mathbf{p}_n(t)) \right) \mathbf{x}(t), \quad (7.1)$$

amely alapján a TP-modellekhez tartozó szabályozók meghatározása TP-modell 1, 2, 3, 4, 5 sorrendben a következő:

$$\mathbf{u}_1(t) = - \left(\sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^2 w_{1,i}(\theta) w_{2,j}(\dot{\theta}) \mathbf{F}_{i,j} \right) \mathbf{x}(t), \quad (7.2)$$

7.1. ábra. A TORA TP-modellek $x_3(t)$ állapotváltozói

$$\mathbf{u}_2(t) = - \left(\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 w_{1,i}(\theta) w_{2,j}(\dot{\theta}) w_{3,k} \left(\frac{1}{f(\theta)} \right) \mathbf{F}_{i,j,k} \right) \mathbf{x}(t), \quad (7.3)$$

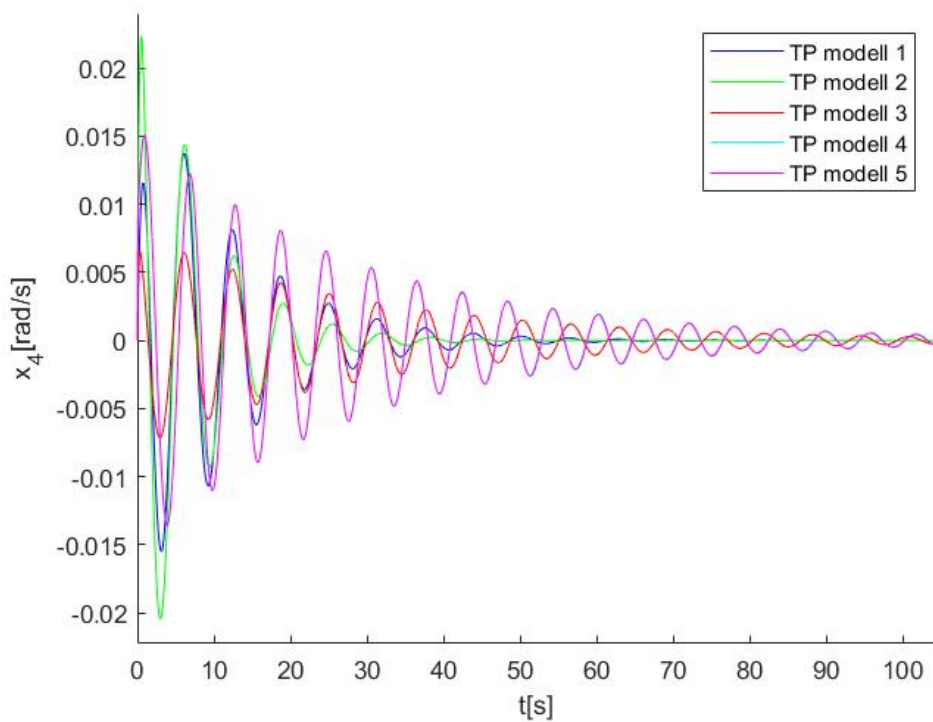
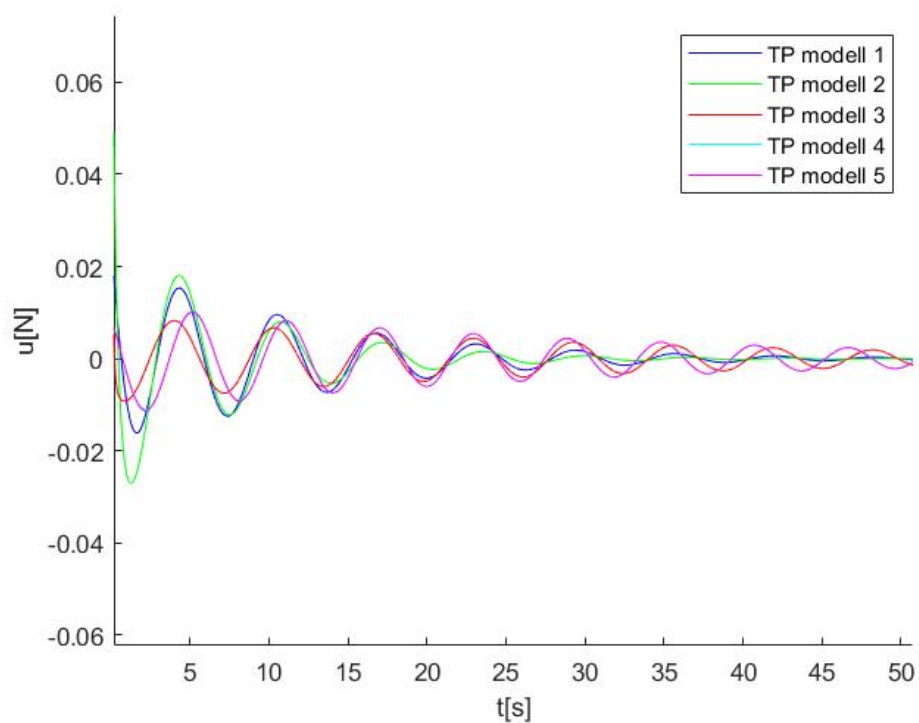
$$\mathbf{u}_3(t) = - \left(\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^3 w_{1,i}(\sin(\theta)) w_{2,j}(\dot{\theta}) w_{3,k}(\cos(\theta)) \mathbf{F}_{i,j,k} \right) \mathbf{x}(t), \quad (7.4)$$

$$\mathbf{u}_4(t) = - \left(\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 w_{1,i}(\dot{\theta}(\sin(\theta))) w_{2,j} \left(\frac{1}{f(\theta)} \right) w_{3,k}(\varepsilon \cos(\theta)) \mathbf{F}_{i,j,k} \right) \mathbf{x}(t), \quad (7.5)$$

$$\mathbf{u}_5(t) = - \left(\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 w_{1,i} \left(\frac{\dot{\theta} \sin(\theta)}{f(\theta)} \right) w_{2,j} \left(\frac{1}{f(\theta)} \right) w_{3,k}(\varepsilon \cos(\theta)) \mathbf{F}_{i,j,k} \right) \mathbf{x}(t). \quad (7.6)$$

A 7.1. ábrán illusztrálom a TORA rendszer $x_3(t)$ állapotváltozóját, a $\theta(t)$ próbatest szöghelyzetét. Észrevehető, hogy 0 és 50 másodperc között keletkeznek a nagyobb oszcillációk és lengések, ezután kerül stabil állapotba a rendszer. Azonban az ábrán jól megfigyelhető, hogy a TP-modell 2 esetében a stacionárius állapot hamarabb kezdődik kb. 25 másodperctől.

A 7.2. ábra mutatja a rendszer $x_4(t)$ állapotváltozóját, amely a $\theta(t)$ próbatest szögsebessége. Így tehát a hangsúly szintén a stacionárius állapot mihamarabbi elérésén van. Ahogy az ábrán is látható, az oszcilláció mértéke 0 és 10 másodperc között a TP-modell 2 esetében a legmagasabb, illetve a TP-modell 3 esetében a legalacsonyabb. Továbbá

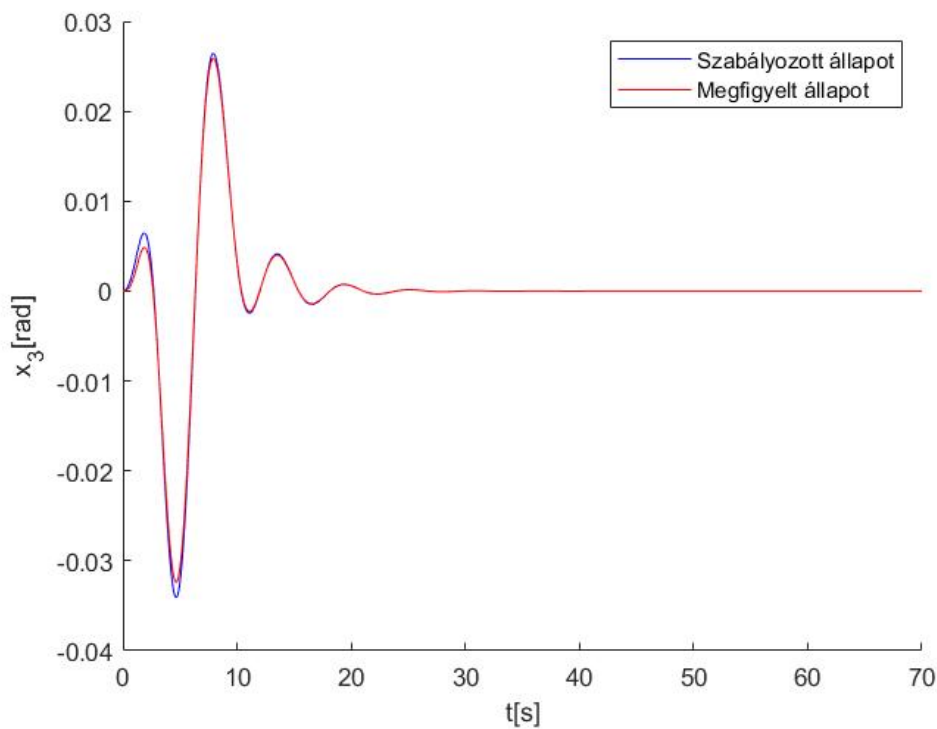
7.2. ábra. A TORA TP-modellek $x_4(t)$ állapotváltozói7.3. ábra. A TORA TP-modellek $u(t)$ szabályozó jelei

észrevehető, hogy a TP-modell 2 esetében hamarabb következik be a stacionárius állapot, ugyanis kb. 30 és 60 másodperc között megszűnik az oszcilláció, míg a többi modell

esetében 100 másodperc után stabilizálódik a rendszer.

7.1. táblázat. Stacionárius értékek TORA TP-modellek esetében

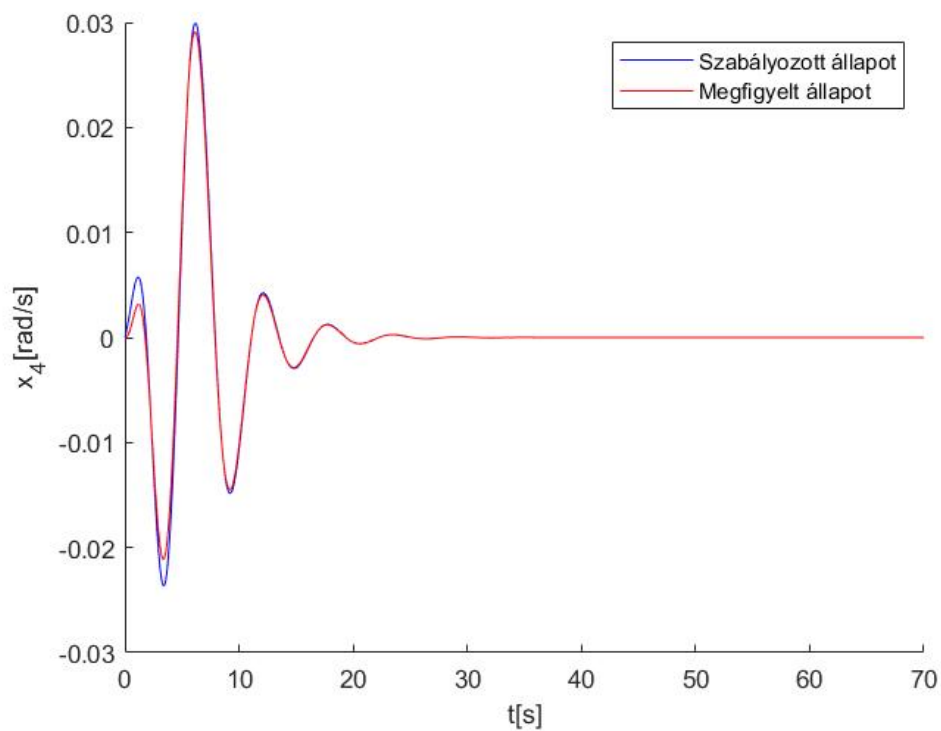
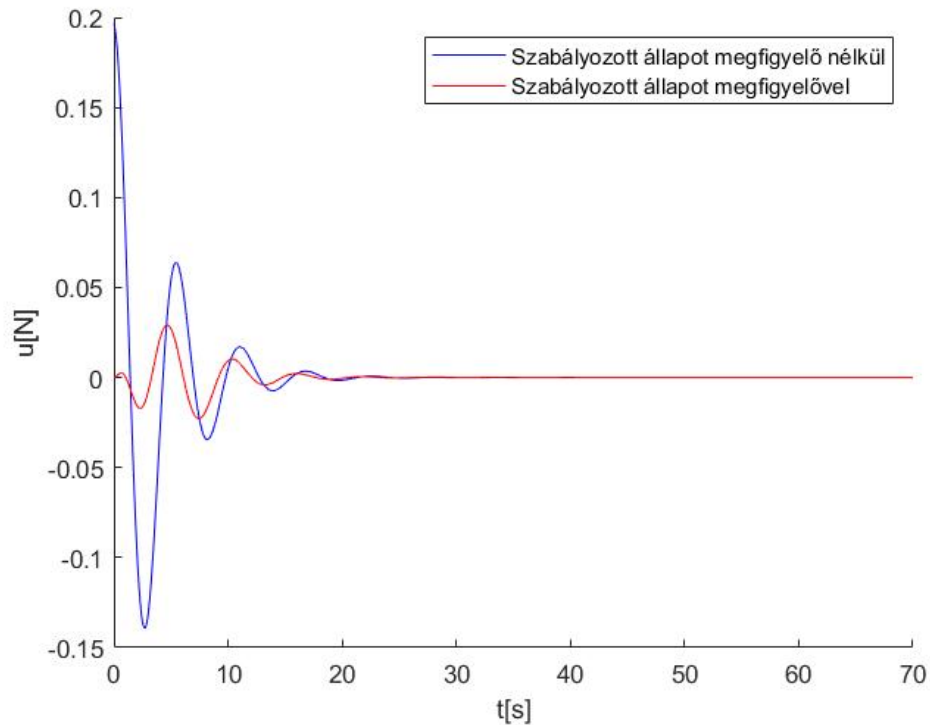
TORA	\mathbf{x}_3 [s]	\mathbf{x}_4 [s]	\mathbf{u} [s]
TP-modell 1	70	70	50
TP-modell 2	30	30	25
TP-modell 3	90	90	70
TP-modell 4	120	120	90
TP-modell 5	150	150	100



7.4. ábra. A TORA TP-modell 2 $x_3(t)$ állapotváltozói

A 7.3. ábra illusztrálja az $u(t)$ szabályozójelet az öt TP-modell esetében. Ez alapján látható, hogy a TP-modell 1 és TP-modell 2 esetében hamarabb stabilizálódik a jel. Az oszcilláció mértéke 0 és 20 másodperc között a TP-modell 2 esetében a legmagasabb, illetve a TP-modell 3 esetében a legalacsonyabb. Továbbá megfigyelhető, hogy a TP-modell 2 esetében hamarabb következik be a stacionárius állapot, ugyanis kb. 20 és 50 másodperc között megszűnik az oszcilláció.

Konklúzióként elmondható, hogy a különböző nemlinearitású TP-modellek LMI-alapú szabályozó teljesítőképességére hatással van a nemlinearitás mértéke, ezáltal ugyanazon

7.5. ábra. A TORA TP-modell 2 $x_4(t)$ állapotváltozó7.6. ábra. A TORA TP-modell 2 $u(t)$ szabályozó jelei

rendszer különböző paraméterterrel eltérő eredményt ad a szabályozóra. A TP-modellek stacionárius állapotának kezdeti másodperceit a 7.1. táblázat tartalmazza. Jelen esetben

a TORA TP-modell 2 stabilizálódik hamarabb, szemben a többi TP-moddal. Ennek értelmében a további vizsgálatok elvégzéséhez javaslom a jobb teljesítőképességű modell alkalmazását, amely a TORA TP-modell 2.

7.1.1. TORA TP-modell 2 stabilitása állapotmegfigyelővel

A csillapodási sebességhez tartozó α -nak pozitívnak kell lennie a stabilitás miatt. Ha a lecsengési sebesség tervezése hatékony, a stabil állapotot gyorsabban lehet elérni. Minél nagyobb a csillapodási ráta, annál kisebb az állapotmegfigyelő becslési ideje, de annál gyorsabban kerül a rendszer stabil állapotba. Viszont a csillapodási ráta nagyobb értéke rosszul kondicionált megfigyelőt eredményez. Ezáltal $\alpha = 0.1$, amely esetében a megfigyelő még jól működik. A modellhez tartozó rendszermátrix:

$$\mathbf{S}(\mathbf{p}(t)) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}(\mathbf{p}(t))\mathbf{B}(\mathbf{p}(t)) \\ \mathbf{C}(\mathbf{p}(t))\mathbf{D}(\mathbf{p}(t)) \end{bmatrix}, \quad (7.7)$$

$$\mathbf{S}(\mathbf{p}(t)) = \begin{bmatrix} 0 & 10 & 0 & 0 \\ -p_3 & 00 & \varepsilon p_2 \sin(p_1) p_3 & -\varepsilon \cos(p_1) p_3 \\ 0 & 00 & 1 & 0 \\ \varepsilon \cos(p_1) p_3 00 - \varepsilon^2 p_2 \cos(p_1) \sin(p_1) p_3 & p_3 & & \\ 0 & 01 & 0 & 0 \\ 0 & 00 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (7.8)$$

A kutatásom során alkalmazott LMI feltételek a következők:

$$\mathbf{P}_1 \mathbf{A}_i^T - \mathbf{M}_i^T \mathbf{B}_i^T + \mathbf{A}_i \mathbf{P}_1 - \mathbf{B}_i \mathbf{M}_i + 2\alpha \mathbf{P}_1 \prec 0, \quad (7.9)$$

$$\mathbf{A}_i^T \mathbf{P}_2 - \mathbf{C}_i^T \mathbf{N}_i^T + \mathbf{P}_2 \mathbf{A}_i - \mathbf{N}_i \mathbf{C}_i + 2\alpha \mathbf{P}_2 \prec 0, \quad (7.10)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_1 \mathbf{A}_i^T - \mathbf{M}_j^T \mathbf{B}_i^T + \mathbf{A}_i \mathbf{P}_1 - \mathbf{B}_i \mathbf{M}_j + \mathbf{P}_1 \mathbf{A}_j^T \\ - \mathbf{M}_i^T \mathbf{B}_j^T + \mathbf{A}_j \mathbf{P}_1 - \mathbf{B}_j \mathbf{M}_i + 4\alpha \mathbf{P}_1 \prec 0, \end{aligned} \quad (7.11)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_i^T \mathbf{P}_2 - \mathbf{C}_j^T \mathbf{N}_i^T + \mathbf{P}_2 \mathbf{A}_i - \mathbf{N}_i \mathbf{C}_j + \mathbf{A}_j^T \mathbf{P}_2 \\ - \mathbf{C}_i^T \mathbf{N}_j^T + \mathbf{P}_2 \mathbf{A}_j - \mathbf{N}_j \mathbf{C}_i + 4\alpha \mathbf{P}_2 \prec 0. \end{aligned} \quad (7.12)$$

A kezdeti értékek $[\xi, \dot{\xi}, \theta, \dot{\theta}]^T = [0.023, 0, 0, 0]^T$, valamint $[\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3, \hat{x}_4]^T = [0, 0, 0, 0]^T$. Az LTI rendszerekből, a \mathcal{K} és \mathcal{F} tenzorból származtatott \mathbf{K} és \mathbf{F} erősítésekre példa:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} -0.2189 & 1.2778 \\ -0.7250 & -1.3300 \\ 0.8283 & 0.1632 \\ 0.4931 & 0.6089 \end{bmatrix}, \quad (7.13)$$

$$\mathbf{F} = [-12.7777 \quad 0.7226 \quad 0.4991 \quad 2.7027], \quad (7.14)$$

ugyanis ezek az értékek minden újabb algoritmus futtatással változnak.

A 7.4.-7.6. ábrákon szemléltetem a TORA TP-modell 2 viselkedését állapotmegfigyelővel (piros színnel) és állapotmegfigyelő nélküli (kék színnel) eseteket. A megfigyelőnek ki kell elégítenie az alábbi feltételt: $\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t) \rightarrow 0$ és $t \rightarrow \infty$, amely teljesült is, ahogyan azt az ábrák mutatják. Azonban kis különbség így is látható, ugyanis az LMI-alapú megfigyelővel vizsgált rendszer esetében kisebb az oszcilláció mértéke, illetve a 7.6. ábra illusztrációja alapján az állapotmegfigyelővel kiegészítve a szabályozójel oszcillációja szintén kisebb mértékű.

A csillapodási sebességgel kiegészített állapotmegfigyelőnek köszönhetően a rendszer kb. 20 másodperc után kezd stabil állapotba kerülni, míg csak a szabályozóval, ez a folyamat kb. 50 másodpercig tart.

7.1.2. TORA TP-modell 2 zavarok elnyomása

A cél a zavarelnyomás (2.89)-(2.91) módszerének alkalmazása az LMI feltételekkel (3.63)-(3.64), amely során a zavar csillapításán van a hangsúly és egyúttal γ minimalizálásán:

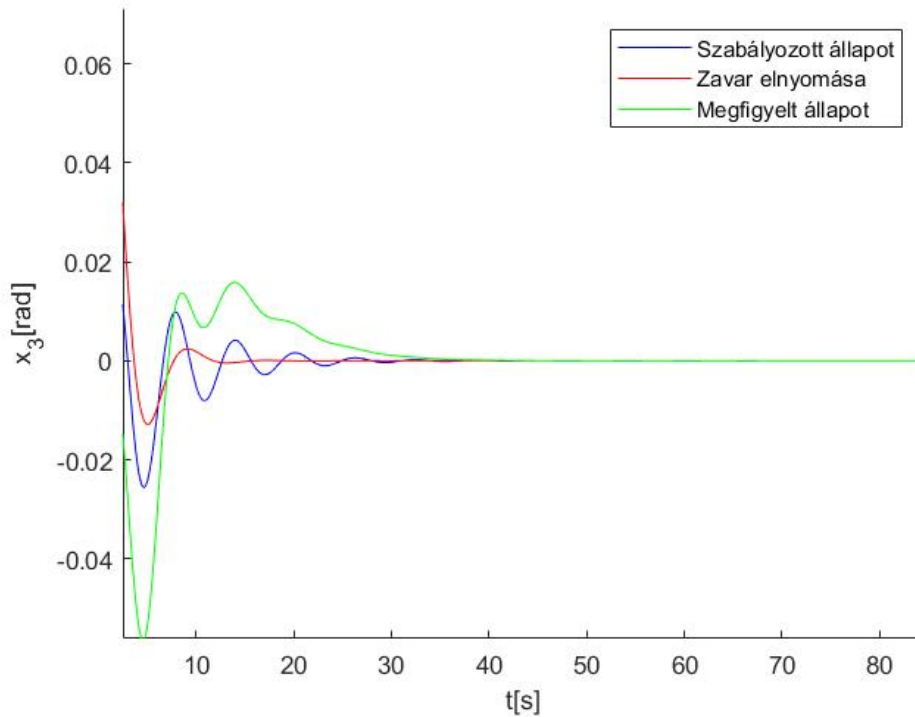
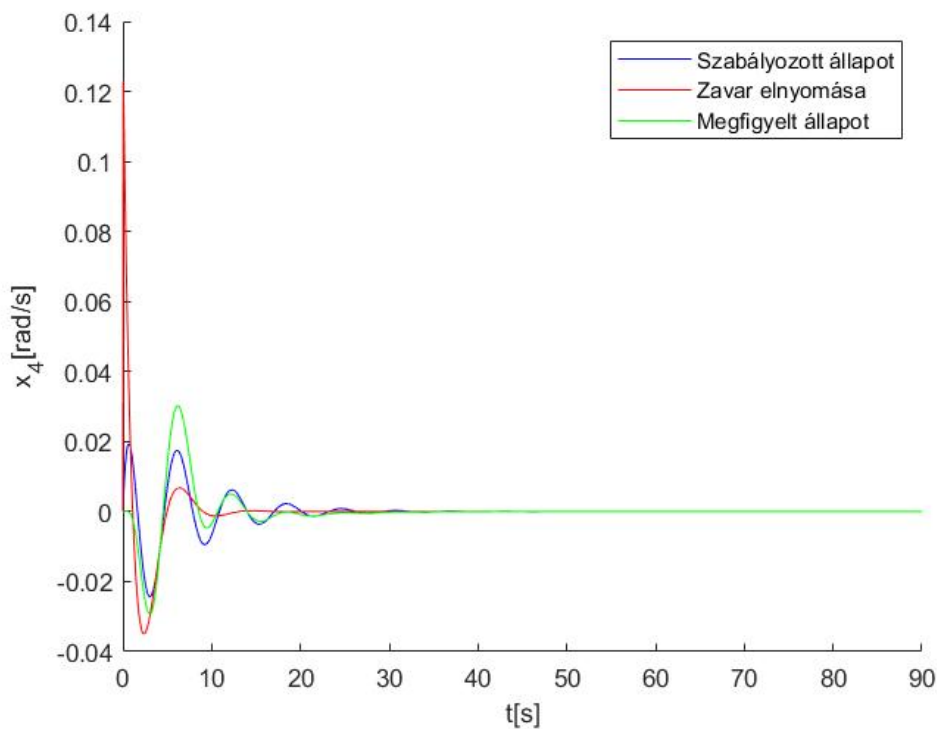
$$\dot{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 w_i(x_3) w_j(x_4) w_k \left(\frac{1}{f(x_3)} \right) \{ \mathbf{A}_{i,j,k} \mathbf{x} + \mathbf{B}_{i,j,k} \mathbf{u} + \mathbf{E}_{i,j,k} \mathbf{v} \}, \quad (7.15)$$

ahol

$$\mathbf{E}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (7.16)$$

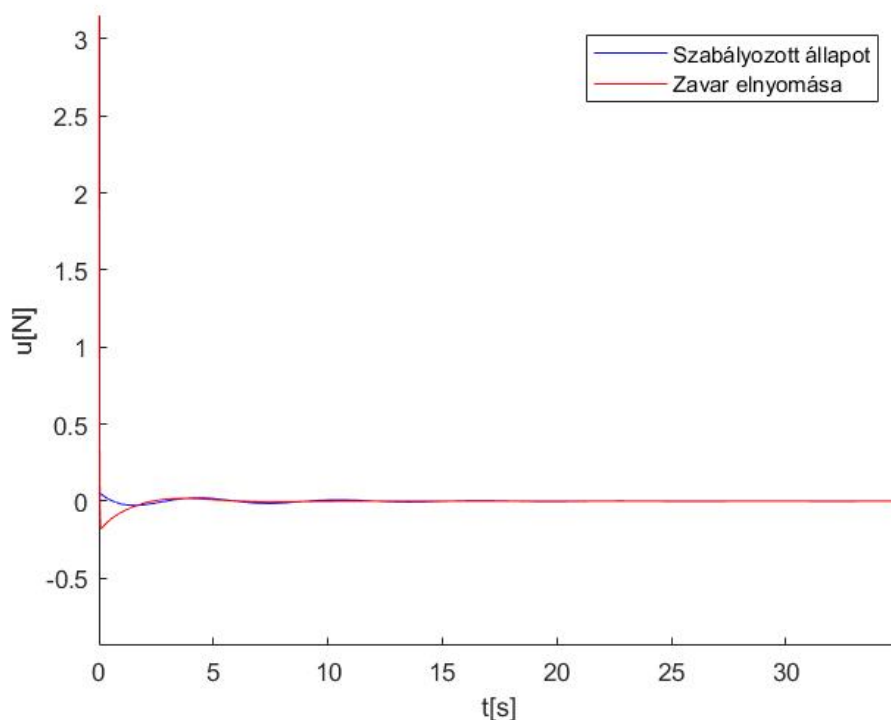
ahol u a (7.3) egyenlet alapján származtatható. Az LMI-n alapuló minimalizálási probléma megoldása lehetővé teszi, hogy kiszámítsam azokat a visszacsatoló \mathbf{F} erősítéseket, amelyek stabilizálják a rendszert és minimalizálják γ -t.

A bemeneten keletkező zavar $v(t) = (8\pi/180)\sin(t)$, amely x_3 -ra, a forgó próbatest szöghelyzetére hat. Az alkalmazott LMI feltételeket a 3.5. fejezet taglalja. A 7.7.-7.9. ábrák illusztrálják a szimulációs eredményeket, amelyeken a könnyebb összehasonlítás érdekében három irányítástechnikai megoldás szerepel: a szabályozó, az állapotmegfigyelő és a zavarelnyomás szabályozóval. Látható, hogy a zavarelnyomás tervezése után hamarabb kerül stacionárius állapotba a rendszer, azonban 0 és 5 másodperc között magasabb az oszcilláció mértéke, mint a másik két esetben.

7.7. ábra. A TORA TP-modell 2 $x_3(t)$ állapotváltozói7.8. ábra. A TORA TP-modell 2 $x_4(t)$ állapotváltozói

7.2. Repülőgépszárny modell stabilitása

A modell stabilitás vizsgálatához szintén a (3.33) és (3.34) LMI feltételeket alkalmaztam.

7.9. ábra. A TORA TP-modell 2 $u(t)$ szabályozó jelei

A kezdeti feltételek mindegyik TP-modell esetében $[h, \alpha, \dot{h}, \dot{\alpha}]^T = [0.01, 0.1, 0, 0]^T$. A 7.10.-7.12. ábrák szemléltetik a kétszabadságfokú repülőgépszárny modell TP-modelljeinek $x_1(t)$ és $x_2(t)$ állapotváltozóit, illetve $u(t)$ szabályozójelet. Lila színnel van jelölve a TP-modell 1, azaz az „eredeti rendszer”. Ezekon az ábrákon láthatóak még a különböző TP-modellek, amelyek esetében csökkent a nemlineáris tulajdonság. A TP-modellek különböző eredményt adnak az LMI-alapú szabályozóra a stabilitás szempontjából. Akárcsak a TORA rendszer esetében, jelen TP-modellek vizsgálata is azon alapul, hogy az egyes modellek esetében az oszcilláció mértéke csökkenjen, és hamarabb kerüljön stacionárius állapotba a rendszer.

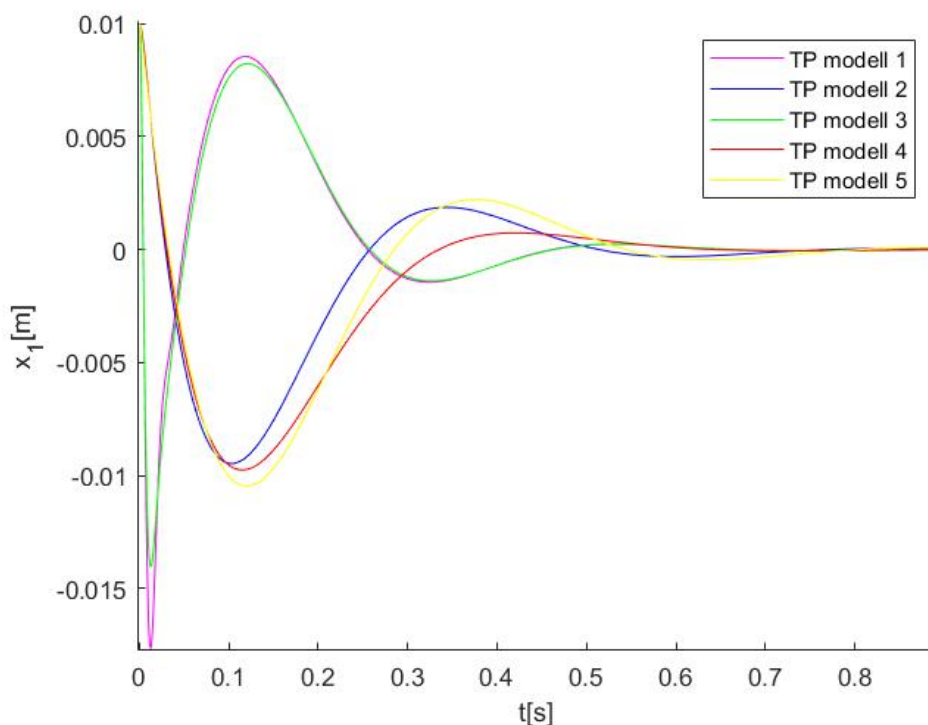
A TP-modellekhez tartozó szabályozók meghatározása TP-modell 1, 2, 3, 4, 5 sorrendben a következő:

$$\mathbf{u}_1(t) = - \left(\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 w_{1,i}(U) w_{2,j}(\alpha) \mathbf{F}_{i,j} \right) \mathbf{x}(t), \quad (7.17)$$

$$\mathbf{u}_2(t) = - \left(\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 w_{1,i}(U) w_{2,j}(k_\alpha(\alpha)) \mathbf{F}_{i,j} \right) \mathbf{x}(t), \quad (7.18)$$

$$\mathbf{u}_3(t) = - \left(\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 w_{1,i}(U) w_{2,j}(U^2) w_{3,k}(\alpha) \mathbf{F}_{i,j,k} \right) \mathbf{x}(t), \quad (7.19)$$

$$\mathbf{u}_4(t) = - \left(\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 w_{1,i}(U) w_{2,j}(U^2) w_{3,k}(k_\alpha(\alpha)) \mathbf{F}_{i,j,k} \right) \mathbf{x}(t), \quad (7.20)$$



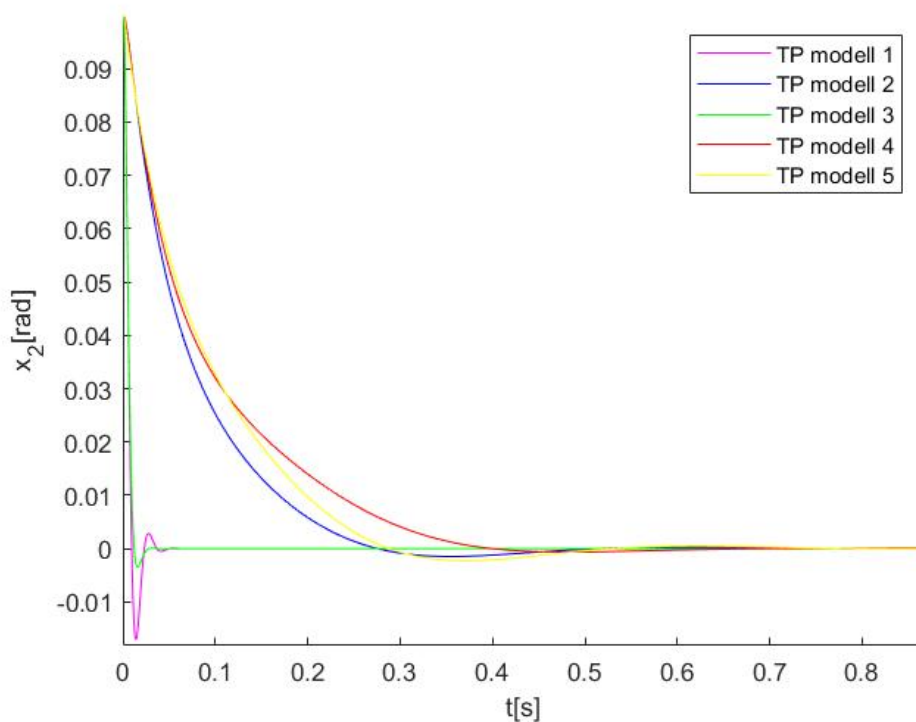
7.10. ábra. A repülőgépszárny TP-modellek $x_1(t)$ állapotváltozói

$$\mathbf{u}_5(t) = - \left(\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 w_{1,i}(U) w_{2,j}(2.82(1 - 22.1\alpha)) w_{3,k}(2.82(1315.5x_2^2 + 8580x_2^3 + 17289.7x_2^4)) \mathbf{F}_{i,j,k} \right) \mathbf{x}(t). \quad (7.21)$$

A 7.10. ábrán illusztrálom a TP-modellek $x_1(t)$ állapotváltozóját, amely a h merülési elmozdulás. Látható, hogy a stacionárius állapot elérése kb. 0.4 és 0.8 másodperc között kezdődik. Az oszcilláció mértéke 0 és 0.3 másodperc között a legmagasabb. Lila szín jelöli a TP-modell 1, azaz az „eredeti rendszer” $x_1(t)$ állapotváltozóját. Látható, hogy a TP-modell 1 és 3 esetében nagyobbak a rezgések. Az ábra alapján a TP-modell 4 hamarabb stabilizálódik és kisebb az oszcilláció mértéke.

A 7.11. ábrán bemutatom a TP-modellek $x_2(t)$ állapotváltozóját, vagyis α dőlési elmozdulását. Látható, hogy a TP-modell 1 és 3 modellek esetében hamarabb stabilizálódik a függvény kb. 0 és 0.1 másodperc között, azonban a TP-modell 2, 4 és 5 modellek esetében hamarabb lecseng a függvény és gyorsabban kerül a rendszer stabil állapotba, mert kevesebb az oszcilláció. Utóbbi három modell esetében a stabilizáció kb. 0.4 és 0.8 másodperc között történik. Egyértelműen látható, hogy a TP-modell 3 jobban teljesít $x_2(t)$ állapotváltozóra.

A 7.12. ábrán szemléltetem az $u(t)$ szabályozójelet minden TP-modell esetében. Az ábráról leolvasható, hogy a TP-modell 2, 4 és 5 esetében hamarabb stabilizálódik a jel, kb. 0.002 és 0.012 másodperc között. A TP-modellek stacionárius állapotának kezdeti másodperceit a 7.2. táblázat tartalmazza. A szabályozó szempontjából a modellek közül a TP-modell 2, 4 és 5 teljesít jobban.

7.11. ábra. A repülőgépszárny TP-modellek $x_2(t)$ állapotváltozói

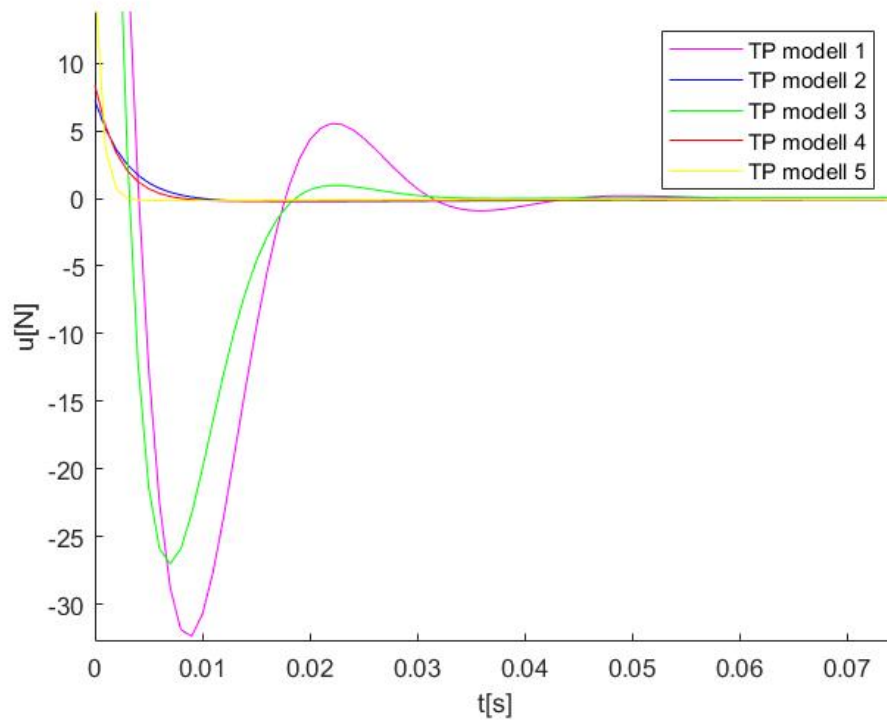
7.2. táblázat. Stacionárius értékek NATA TP-modellek esetében

NATA	x_1 [s]	x_2 [s]	u [s]
TP-modell 1	0.75	0.06	0.07
TP-modell 2	0.9	0.4	0.02
TP-modell 3	0.75	0.03	0.03
TP-modell 4	0.65	0.3	0.01
TP-modell 5	1	0.5	0.02

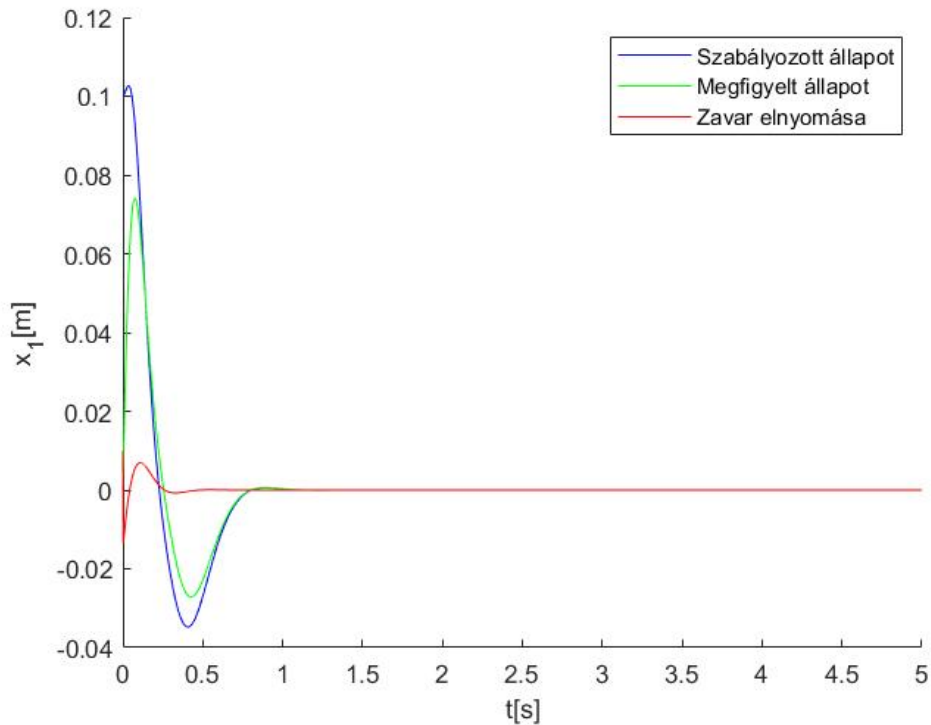
7.2.1. A repülőgépszárny TP-modell 4 stabilitása

A szabályozó teljesítőképessége alapján az öt TP-modell közül kiválasztottam a jobban teljesítő modellt, amely a TP-modell 4 és amelyet tovább vizsgálok az állapotmegfigyelő (3.59)-(3.62) és a zavarelnyomás tervezési szempontjából. A rendszermatrix a következő:

$$\mathbf{S}(\mathbf{p}(t)) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -k_1 - k_2 p_2(t) - \frac{-m x_\alpha b}{d} p_3(t) - c_1(p_1(t)) - c_2(p_1(t)) g_3 p_2(t) \\ -k_3 & -k_4 p_2(t) - \frac{m}{d} p_3(t) & -c_3(p_1(t)) - c_4(p_1(t)) g_4 p_2(t) \end{bmatrix}. \quad (7.22)$$

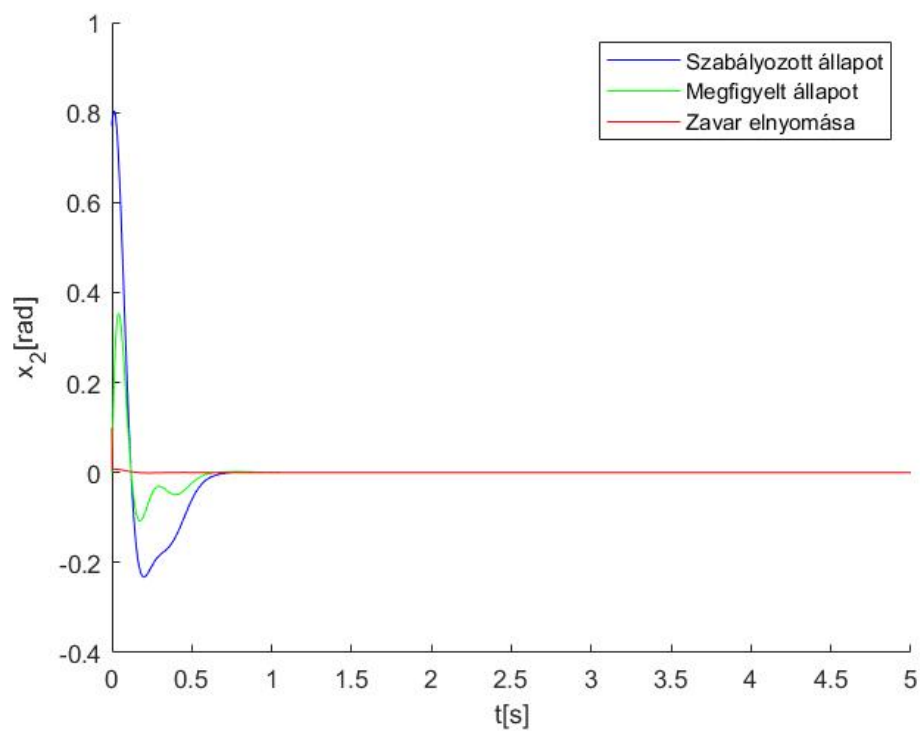


7.12. ábra. A repülőgépszárny TP-modellek $u(t)$ szabályozó jelei

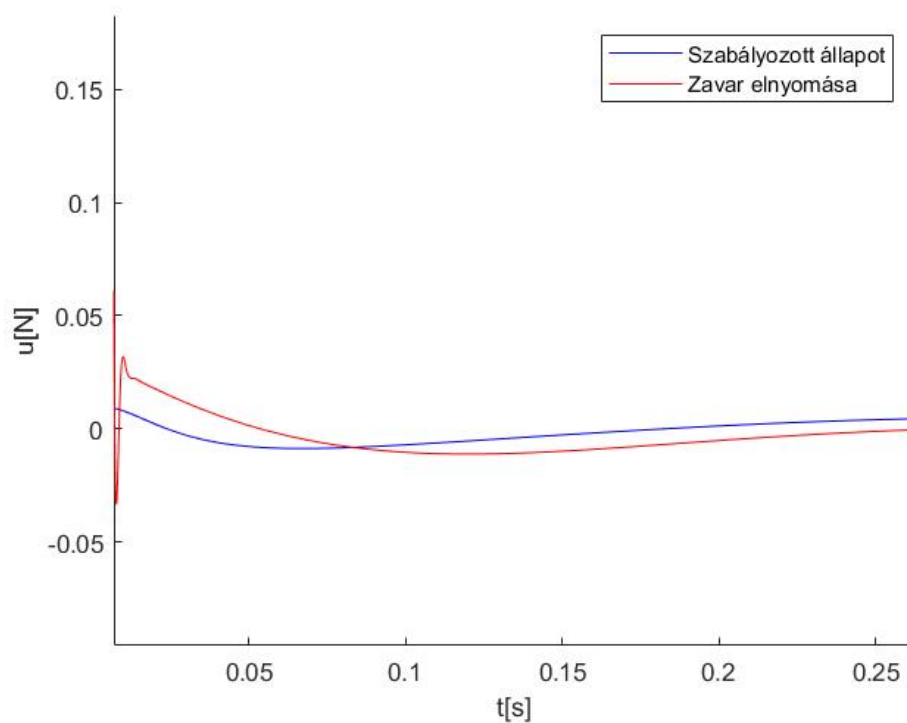


7.13. ábra. A repülőgépszárny TP-modell 4 $x_1(t)$ állapotváltozói

A modell kezdeti értékei $[h, \alpha, \dot{h}, \dot{\alpha}]^T = [0.01, 0.1, 0, 0]^T$ és $[\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3, \hat{x}_4]^T = [0, 0, 0, 0]^T$. A $\|\mathbf{u}(t)\|_2 \leq \mu$ bemeneti korlátozásra vonatkozó LMI feltételek (3.38)-(3.39) alkalmazása



7.14. ábra. A repülőgépszárny TP-modell 4 $x_2(t)$ állapotváltozói



7.15. ábra. A repülőgépszárny TP-modell 4 $u(t)$ szabályozó jelei

során $u_{max} = 30$, μ pedig 0.1. A megfigyelő kielégíti a következő feltételt: $\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t) \rightarrow 0$ és $t \rightarrow \infty$.

A 7.13. és a 7.14. ábrán látható a repülőgépszárny modell x_1 (merülési elmozdulás) és x_2 (dőlési elmozdulás) állapotváltozói, összehasonlításképpen a szabályozott, a megfigyelt, valamint a zavarelynomás esetekben. Megfigyelhető, hogy a zavar elnyomásának tervezésekor alkalmazott LMI feltételeknek (3.63)-(3.64) köszönhetően a stabilitás hamarabb következik be, γ minimalizálódik:

$$\dot{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 w_i(U)w_j(U^2)w_k(k_\alpha(\alpha)) \{ \mathbf{A}_{i,j,k} \mathbf{x} + \mathbf{B}_{i,j,k} \mathbf{u} + \mathbf{E}_{i,j,k} \mathbf{v} \}, \quad (7.23)$$

ahol

$$\mathbf{E}_i = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (7.24)$$

Az ábrákon látható, hogy a zavarelynomás módszere jól működik az LMI feltételekkel. A stabil állapot hamarabb következik be, mint a szabályozó és a megfigyelő esetében.

7.3. A tudományos eredmények összefoglalása

Tézis 3

Kidolgoztam és MATLAB környezetben implementáltam a különböző lineáris mátrix egyenlőtlenség feltételeket: a csillapodási sebesség maximalizálását és a bemenet korlátozását az állapotmegfigyelővel kiegészítve, valamint a zavar elnyomásának tervezését a H_∞ szabályozóval. Ennek következtében realizáltam a lineáris mátrix egyenlőtlenség alapú stabilitást megvalósító szabályozót és állapotmegfigyelőt két nemlineáris dinamikus rendszer tenzorszorzat alapú transzformációja kapcsán. Ezáltal minden tenzorszorzat alapú modell esetében elértem a globális aszimptotikus stabilitást.

A Tézishez kapcsolódó saját publikációk a következők: [187–190, 195].

III. rész

Összefoglaló és publikációk

8. fejezet

Tézisek: új tudományos eredmények összefoglalása

Ebben a fejezetben összefoglalom a dolgozatban ismertetett új tudományos eredményeimet, téziseimet.

Tézis 1

Kidolgoztam egy módszert, amelynek segítségével csökkenthető a TP-modell nemlineáris tulajdonsága, és a paramétertér változtatásával alternatív TP-modelleket lehet létrehozni. A modellek bemenetei az eredeti bemenetek függvényeként adhatók meg. Elvégeztem a nemlineáris tulajdonság csökkentését két nemlineáris dinamikus rendszer modelljén keresztül, és megvizsgáltam, hogy a különböző nemlinearitásokat a modellből kiemelve, az milyen hatással van a tenzorszorzat alapú transzformációra. Ezáltal lehetőség nyílik a lineáris mátrix egyenlőtlenség alapú szabályozó teljesítőképessége szempontjából kevésbé komplex modellt kiválasztani.

A Tézishez kapcsolódó saját publikációk a következők: [188, 189, 194].

Tézis 2

Kidolgoztam a lineáris mátrix egyenlőtlenség megoldhatósági vizsgálatának módszerét CNO típusú súlyfüggvény használatával és a transzformációs tér változtatásával alternatív TP-modellekhez. Ennek következtében a nemlineáris tulajdonság csökkentésével a lineáris mátrix egyenlőtlenség módszer megoldhatósági régiói egyre nagyobb területet fednek le azáltal, ahogy a rendszer nemlineáris tulajdonsága egyre inkább csökken. Bebizonyítottam, hogy azon tenzorszorzat alapú modellek esetében, ahol a súlyfüggvények száma megegyezik, azonban a konzekvens eltérő, a szabályozó alternatív megoldást adhat. A módszert két nemlineáris dinamikus rendszeren validáltam, amely alapján prezentáltam azokat az eseteket, amelyek során a lineáris mátrix egyenlőtlenség még megoldható és a szabályozó, illetve az állapotmegfigyelő tervezhető.

A Tézishez kapcsolódó saját publikációk a következők: [190, 193, 194].

Tézis 3

Kidolgoztam és MATLAB környezetben implementáltam a különböző lineáris mátrix egyenlőtlenség feltételeket: a csillapodási sebesség maximalizálását és a bemenet korlátozását az állapotmegfigyelővel kiegészítve, valamint a zavar elnyomásának tervezését a H_∞ szabályozóval. Ennek következtében realizáltam a lineáris mátrix egyenlőtlenség alapú stabilitást megvalósító szabályozót és állapotmegfigyelőt két nemlineáris dinamikus rendszer tenzorszorzat alapú transzformációja kapcsán. Ezáltal minden tenzorszorzat alapú modell esetében elértem a globális aszimptotikus stabilitást.

A Tézishez kapcsolódó saját publikációk a következők: [187–190, 195].

9. fejezet

Konklúzió

Az értekezésben a TP-modelltranszformációval foglalkoztam, amely kapcsolódik az irányítástechnika területéhez is, ugyanis szabályozót, állapotmegfigyelőt, valamint H_∞ alapú zavarelnyomást, illetve csillapodási sebességet terveztem nemlineáris rendszerekhez LMI módszerekkel.

Az alkalmazott tenzorszorzat alapú modelltranszformáció a magasabb rendű szinguláris értékek felbontásán alapszik, amely során a lineáris mátrix egyenlőtlenség módszerével numerikus úton előállítottam a lineáris időinvariáns rendszereket.

A nemlineáris rendszerek qLPV állapotter reprezentációjának segítségével, a HOSVD módszerével végrehajtottam a TP-modelltranszformációt. Ezután megváltoztattam a modellek paraméterterét, csökkentettem a nemlinearitások számát, ezáltal újabb TP-modelleket kaptam. Megvizsgáltam a súlyfüggvények alakulását a nemlinearitás csökkentésének függvényében, továbbá változtattam a transzformációs tér kiterjedési területén.

A vizsgálatok eredményei azt mutatják, hogy adott mechanikai rendszerhez célszerű több TP-modellt is létrehozni, adott esetben a nemlineáris tulajdonság csökkentésével, vagy a transzformációs tér kiterjesztésével logikus keretek között. Ezenkívül látható, hogy nem feltétlen a kevésbé nemlineáris modell szabályozója teljesít jobban (például TP-modell 5). Míg a TORA rendszer esetében a TP-modell 2 bizonyult a hatékonyabban teljesítő modellnek, addig a repülőgépszárny modell esetében a TP-modell 4, amellett, hogy a nemlineáris tulajdonság fokozatosan került csökkentésre mindegyik modell esetében. Természetesen a módszer addig működik, ameddig az LMI megoldható. Erre pedig a megoldhatósági vizsgálat szolgál.

A nemlineáris tulajdonság mellett a különböző típusú súlyfüggvények is befolyásolják a lineáris mátrix egyenlőtlenség megoldhatósági régióit. Az implementációs példák segítségével a szimulációs eredményeket összehasonlítottam. A dimenziók rangja tovább csökkenthető a nemlineáris bemenet használatával, ez pedig csökkenti az antecedensek számát és új konvex burkot definiál a csúcsrendszerek számára.

A jövőbeni terveimet tekintve, szeretném egyéb nemlineáris szabályozótervezési eljárással összehasonlítani az LMI-alapú szabályozót a TP-modell-transzformáció módszerével. Továbbá tervezem az eddigi vizsgálatok mikrovezérlő segítségével való megvalósítását is. Egyébiránt érdekes lenne néhány további dinamikus rendszert vizsgálni, például az e-mobilitás előtérbe kerülésével a villamos gépek hajtását, vagy a teljesítményelektronikáját.

10. fejezet

A szerző publikációi

A. Wéber, M. Kuczmann: State Feedback Controller Design of an Active Suspension System for Vehicles Using Pole Placement Technique, ACTA TECHNICA JAURINENSIS, 12:3, pp. 178-190, 2019.

A. Wéber, M. Kuczmann: TP Transformation of the Inverted Pendulum, 2020 2nd IEEE International Conference on Gridding and Polytope Based Modelling and Control (GPMC), pp. 13-18. , 6 p, 2020.

A. Wéber, M. Kuczmann: Study of the TP Transformation via the Inverted Pendulum Example, ACTA TECHNICA JAURINENSIS 14:1, 23 p., 2021.

A. Wéber, M. Kuczmann: TP Transformation Based Controller and Observer Design of the Inverted Pendulum, PRZEGLAD ELEKTROTECHNICZNY, pp. 34-39, R. 98 NR 10/2022.

A. Wéber, M. Kuczmann: TP Transformation Based Observer and Controller Design of 2DoF Aeroelastic Wing Section Model, 2022 IEEE 1st International Conference on Internet of Digital Reality (IoD), pp. 000017-000022, 2022.

A. Wéber: Nemlineáris rendszerek tenzorszorzat alapú megfigyelőjének tervezése, Új Nemzeti Kiválóság Program 2021/2022, Széchenyi István Egyetem, pp. 249-258, 2022.

A. Wéber, M. Kuczmann: LMI Feasibility Analysis of 2DoF NATA model, Pollack Periodica, 2023.

A. Wéber, M. Kuczmann, P. Baranyi: Extending the Input and Transformation Space of Different TP Models: an LMI Based Feasibility Analysis, Acta Polytechnica Hungarica, 2023.

A. Wéber, M. Kuczmann: Extending the TPTool MATLAB toolbox with LMI based observer and disturbance rejection design, Results in Control and Optimization, 2023.

Irodalomjegyzék

- [1] P. Baranyi: TP-Model Transformation-Based-Control Design Frameworks Cham, Switzerland: Springer International Publishing, 2016.
- [2] P. Baranyi: The Generalized TP Model Transformation for TS-fuzzy Model Manipulation and Generalized Stability Verification IEEE Transactions on Fuzzy Systems, vol. 22, no. 4, pp. 934–948, 2014.
- [3] P. Baranyi: TP Model Transformation as a Way to LMI-based Controller Design IEEE Transactions on Industrial Electronics, vol. 51, no. 2, pp. 387–400, 2004.
- [4] P. Baranyi: Extracting LPV and qLPV structures from state-space functions: a TP model transformation based framework IEEE Transactions on Fuzzy Systems, vol. 28, no. 3, pp. 499–509, 2020.
- [5] P. Baranyi: How to vary the input space of a TS-fuzzy model: a TP model transformation based approach IEEE Transactions on Fuzzy Systems, vol. 30, no. 2, pp. 345–356, 2020.
- [6] Baranyi P., Yam Y., Várlaki P.: Tensor Product Model Transformation in Polytopic Model Based Control, 1st Edition, CRC Press, Taylor and Francis Group, 2018.
- [7] Tanaka K., Wang H.O.: Fuzzy Control Systems Design and Analysis: A linear Matrix Inequality Approach, John Wiley and Sons, 2001.
- [8] Tanaka K., Ikeda T., Wang H.O.: Fuzzy regulators and fuzzy observers: relaxed stability conditions and LMI-based designs, IEEE Transactions on Fuzzy Systems, vol. 6, no. 2, pp. 250–265, 1998.
- [9] B. Takarics, P. Baranyi: Tensor-product-model-based control of a three degrees-of-freedom aeroelastic model, Journal of Guidance, Control and Dynamics, vol. 36, no. 5, pp. 1527–1533, 2013.
- [10] P. Baranyi, B. Takarics: Aeroelastic Wing Section Control via Relaxed Tensor Product Model Transformation Framework, Journal of Guidance, Control and Dynamics, vol. 37, no. 5, pp. 1671–1678, 2014.
- [11] P. Baranyi: Tensor Product Model based Control of two Dimensional Aeroelastic System, Journal of Guidance, Control and Dynamics, vol. 29, no. 2, pp. 391–400, 2006.

- [12] A. Szollosi, P. Baranyi: Influence of the Tensor Product model representation of qLPV models on the feasibility of Linear Matrix Inequality, *Asian Journal of Control*, vol. 18, no. 4, pp. 1328–1342, 2015.
- [13] A. Szollosi, P. Baranyi: Improved control performance of the 3-DoF aeroelastic wing section: a TP model based 2D parametric control performance optimization, *Asian Journal of Control*, vol. 19, no. 2, pp. 450–466, 2016.
- [14] A. Szollosi, P. Baranyi: Influence of the Tensor Product Model Representation of qLPV Models on the Feasibility of Linear Matrix Inequality Based Stability Analysis, *Asian Journal of Control*, vol. 10, no. 1, pp. 531–547, 2017.
- [15] Szollosi. A.: TP Model Transformation Based Control Theory Optimization of Nonlinear Models Budapest University of Technology and Economics Department of Telecommunications and Media Informatics Doctoral School of Informatics, Ph.D. Dissertation, 2017.
- [16] Takarics B.: TP Model Transformation Based Sliding Mode Control and Friction Compensation Budapest University of Technology and Economics Department of Telecommunications and Media Informatics Doctoral School of Informatics, Ph.D. Dissertation, 2011.
- [17] Petres Z.: Polytopic Decomposition of Linear Parameter-Varying Models by Tensor-Product Model Transformation Budapest University of Technology and Economics Department of Telecommunications and Media Informatics Doctoral School of Informatics, Ph.D. Dissertation, 2006.
- [18] Takarics B., Baranyi P.: Friction Compensation in TP Model Form - Aeroelastic Wing as an Example System *Acta Polytechnica Hungarica*, 12(4), pp. 127–145, 2015.
- [19] Baranyi P.: Output Feedback Control of two-Dimensional Aeroelastic System *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 29(3), pp. 762–767, 2005.
- [20] Stephen B., Laurent E.G., Eric F., Venkataramanan B.: *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory* Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1994.
- [21] Guang-Ren D., Hai-Hua Y.: *LMIs in Control Systems Analysis, Design and Applications* CRC Press, Engineering Technology, Boca Raton, 2013.
- [22] P. Baranyi, D. Tikk, Y. Yam, R. J. Patton: From differential equations to PDC controller design via numerical transformation *Computers in Industry*, vol. 51, no. 3, pp. 281–297, 2003.
- [23] Z. Petres, B. Reskó, P. Baranyi: TP Model Transformation Based Control of the TORA System *Production Systems and Information Engineering*, vol. 2, pp. 159–175, 2004.
- [24] Rózsa P.: *Lineáris Algebra és Alkalmazásai* Tankönyvkiadó, Budapest, 1991.
- [25] P.M. Young, M.P. Newlin, J.C. Doyle: *Let's Get Real, Robust Control Theory* pp. 143–174, Budapest, 1995.

- [26] P. Gahinet, P. Apkarian: A Linear Matrix Inequality Approach to H_{∞} control International Journal of Robust and Nonlinear, Control, 4(4), pp. 421–448, 1994.
- [27] S. Boyd, L.El Ghaoui, E. Feron, V. Balakrishnan: Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory Society for Industrial Mathematics, vol. 15, 1994.
- [28] Alexandr Mikhailovich Liapunov: The general problem of the stability of motion Univers ité de Louvain, Institut mathématique, B-1348 Louvain-la-Neuve, Belgium.
- [29] S. Boyd, Q. Yang: Structured and Simultaneous Lyapunov Functions for System Stability Problems International Journal of Robust and Nonlinear, Control, 49(6), pp. 2215–2240, 1989.
- [30] C. Scherer, S. Weiland: Linear Matrix Inequalities in Control Lecture Notes, Dutch Institute for Systems and Control, Delft, The Netherlands, 2000.
- [31] Y. Yam: Fuzzy approximation via grid point sampling and singular value decomposition, IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics, 27(6):933–951, 1997.
- [32] TP Tool (2022). MATLAB Central File Exchange. Retrieved July 21, 2022. TP Tool (<https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/25514-tp-tool>)
- [33] Sz. Nagy, Z. Petres, P. Baranyi: TP Model Transformation Based Controller Design for the Parallel-type Double Inverted Pendulum, June 2008 IEEE International Conference on Fuzzy Systems, Hong Kong, China.
- [34] P. Baranyi, P. Szeidl, P. Várlaki, Y. Yam: Definition of the HOSVD Based Canonical Form of Polytopic Dynamic Models, Proceedings of the 2006 IEEE International Conference on Mechatronics, Budapest, 2006 pp. 660–665.
- [35] P. Szeidl, P. Várlaki: HOSVD Based Canonical Form for Polytopic Models of Dynamic Systems, Journal of Advanced Computational Intelligence and Intelligent Informatics, vol. 13, no. 1, (2009) pp. 52–60.
- [36] P. Korondi: Tensor Product Model Transformation-based Sliding Surface Design, Acta Polytechnica Hungarica vol. 3, no. 4, (2006) pp. 23–35.
- [37] F. Kolonic, A. Poljungan, I. Petrovic: Tensor Product Model Transformation-based Controller Design for Gantry Crane Control System-an Application Approach, Acta Polytechnica Hungarica vol. 3, no. 4, (2006) pp. 95–112.
- [38] S. Lim, J. How: Analysis of linear parameter-varying systems using a non-smooth dissipative systems framework, International Journal of Robust and Nonlinear Control, vol. 12, no. 12, pp. 1067–1092, 2002.
- [39] G. Becker, A. Packard: Robust performance of linear parametrically varying systems using parametrically-dependent linear feedback, Systems Control Letters, vol. 23, no. 3, pp. 205–215, 1994.
- [40] G. Feng, J. Ma: Quadratic stabilization of uncertain discrete-time fuzzy dynamic systems, Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, IEEE Transactions, vol. 48, no. 11, pp. 1337–1344, 2001.

- [41] J. Hespanha, D. Liberzon, A. Morse: Overcoming the limitations of adaptive control by means of logic-based switching, *Systems Control Letters*, vol. 49, no. 1, pp. 49–65, 2003.
- [42] J. S. Shamma, M. Athans: Guaranteed properties of gain-scheduled control for linear parameter-varying plants, *Automatica*, vol. 27, pp. 559–564, 1991.
- [43] M. Ravindranathan, R. Leitch: Model switching in intelligent control systems, *Artificial intelligence in engineering*, vol. 13, no. 2, pp. 175–187, 1999.
- [44] J. Fuller, D. Seto, R. Meisner: Optimization-based control for flight vehicles, *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit*, 2000.
- [45] A. Tsourdos, R. Żbikowski, B.A. White: Robust Autopilot for a Quasi-Linear Parameter-Varying Missile Model, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 24, no. 2, pp. 287-295, 2001.
- [46] A. Tsourdos, R. Żbikowski, B.A. White: Lateral Acceleration Flight Control for a Quasi-Linear Parameter Varying Missile Model Via Pseudolinearisation, *IFAC Proceedings Volumes*, vol. 33, no. 14, pp. 347-353, 2000.
- [47] M. Mattei: An LPV approach to the robust control of a class of quasi-linear propagation processes, *Journal of Process Control*, vol. 14, no. 6, pp. 651-660, 2004.
- [48] G. J. Balas: Linear, parameter-varying control and its application to aerospace systems, *ICAS 2002 CONGRESS*.
- [49] G. W. Stewart: On the early history of singular value decomposition, *Technical Report TR-92-31*, Institute for Advanced Computer Studies, University of Mariland, March 1992.
- [50] L. D. Lathauwer, B. D. Moor, J. Vandewalle: A Multilinear Singular Value Decomposition, *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications* 2000, vol. 21 no.4, pp. 1253-1278.
- [51] R.M. Bowen, C. C. Wang: *Introduction to Vectors and Tensors, Linear and Multilinear Algebra*, Plenum Press, NY, 1980.
- [52] E.F. Deprettere: *SVD and Signal Processing: Algorithms, Applications and Architectures*, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, The Netherlands, 1988.
- [53] J. Löfberg: YALMIP : A Toolbox for Modeling and Optimization in MATLAB, In *Proceedings of the CACSD Conference*, <https://yalmip.github.io/download/>, 2004.
- [54] R. J. Vaccaro: *SVD and Signal Processing II: Algorithms, Analysis and Applications*, Elsevier Science, 1991.
- [55] M.S. Moonen, B. De Moor: *SVD and Signal Processing III: Algorithms, Architectures, and Applications*, Elsevier Science, 1995.
- [56] Y. Yam: Fuzzy approximation via grid point sampling and singular value decomposition, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics*, vol. 27, no. 6, pp. 933–951, 1997.

- [57] Y. Yam, P. Baranyi, C. T. Yang: Reduction of fuzzy rule base via singular value decomposition, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 7, no. 2, pp. 120–132, 1999.
- [58] L. De Lathauwer, B. De Moor, J. Vandewalle: A multilinear singular value decomposition, *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, vol. 21, no. 4, pp. 1253–1278, 2000.
- [59] Y. Nesterov, A. Nemirovskii: Interior-point polynomial algorithms in convex programming, *SIAM Studies in Applied Mathematics*, 1994.
- [60] P. Apkarian, P. Gahinet, G. Becker: Self-scheduled H_∞ linear parameter-varying systems, In *Proceedings of the 1994 American Control Conference*, vol. 1, pp. 856–860, Baltimore, Maryland, USA, 1994.
- [61] E. Feron, P. Apkarian, P. Gahinet.: S-procedure for the analysis of control systems with parametric uncertainties via parameterdependent Lyapunov functions, In *Proceedings of the 1995 American Control Conference*, vol. 1, pp. 968–972, Seattle, Washington, USA, 1995.
- [62] A. Nemirovskii, P. Gahinet.: The projective method for solving linear matrix inequalities, In *Proceedings of the 1994 American Control Conference*, vol. 1, pp. 840–844, Baltimore, Maryland, USA, 1994.
- [63] C. Scherer: H_∞ -optimization without assumptions on finite or infinite zeros, *SIAM Journal on Control and Optimization*, vol. 30, no. 1, pp. 143–166, 1992.
- [64] J.C. Doyle, K. Glover, P.P. Khargonekar, B.A. Francis: Statespace solutions to standard H_2 and H_∞ control problems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 34, no. 8, pp. 831–847, 1989.
- [65] P. Gahinet: Explicit controller formulas for LMI-based H_∞ synthesis, In *Proceedings of the 1994 American Control Conference*, vol. 3, pp. 2396–2400, Baltimore, Maryland, USA, 1994.
- [66] P. Gahinet, A.J. Laub: Reliable computation of ϕ_{opt} in singular H_∞ control, In *Proceedings of the 33rd IEEE Conference on Decision and Control*, 1994, vol. 2, pp. 1527–1532, Orlando, Florida, USA, 1994.
- [67] S. Boyd, V. Balakrishnan, P. Kabamba: A bisection method for computing the H_∞ norm of a transfer matrix and related problems, *Mathematics of Control, Signals, and Systems (MCSS)*, vol. 2, no. 3, pp. 207–219, 1989.
- [68] I. Kaminer, P.P. Khargonekar, M.A. Rotea: Mixed H_2/H_∞ control for discrete-time systems via convex optimization, *Automatica*, vol. 29, no. 1, pp. 57–70, 1993.
- [69] A. Edelmayer, J. Bokor: Optimal H_2/H_∞ scaling for sensitivity optimization of detection filters, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 12, no. 8, pp. 749–760, 2002.
- [70] Z. Szabó, J. Bokor, F. Schipp: Identification of rational approximate models in H_∞ using generalized orthonormal basis, *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 44, no. 1, pp. 153–158, 1999.

- [71] P. Gáspár, J. Bokor.: Progress in system and robot analysis and control design, 1999.
- [72] M. Bernal, A. Sala, Zs. Lendek, T. M. Guerra: Analysis and Synthesis of Nonlinear Control Systems, A Convex Optimisation Approach, Springer, Studies in Systems, Decision and Control, vol. 408, 2022.
- [73] A. Alleyne: Physical insights on passivity-based TORA control designs, IEEE Transactions on Control Systems Technology, vol. 6, no. 3, pp. 436-439, May 1998.
- [74] P. Rózsa: Lineáris Algebra és Alkalmazásai, Tankönyvkiadó, Budapest, 1991.
- [75] H. Wang, H. Dong, L. He, Y. Shi, Y. Zhang: Design and Simulation of LQR Controller with the Linear Inverted Pendulum, 2010 International Conference on Electrical and Control Engineering, Wuhan, China, 2010.
- [76] L.B. Prasad, B. Tyagi, H.O. Gupta: Optimal control of nonlinear inverted pendulum dynamical system with disturbance input using PID controller LQR, 2011 IEEE International Conference on Control System, Computing and Engineering, Penang, Malaysia, 2011.
- [77] M. Kuczmann: Comprehensive Survey of PID Controller Design for the Inverted Pendulum, Acta Technica Jaurinensis, vol. 12, no. 1, (2019) pp. 55–81.
- [78] M. Kuczmann: State Space Based Linear Controller Design for the Inverted Pendulum, Acta Technica Jaurinensis, vol. 12, no. 2, (2019) pp. 130–147.
- [79] P. Grof, Y. Yam: Furuta Pendulum - a Tensor Product Model-based Design Approach Case Study, IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics (2015) pp. 2620–2625.
- [80] S. Iles, J. Matusko, F. Kolonic: TP transformation based control of rotary pendulum, IEEE 2011 Proceedings of the 34th International Convention MIPRO, Opatija, Croatia.
- [81] G. Bergqvist, E. Larsson: The Higher Order Singular Value Decomposition: Theory and an Application, IEEE Signal Processing Magazine, vol.27, no. 3, (2010) pp. 151–154.
- [82] T. Wang, Y. Bi, T. Hou, B. Liu, J. Cui: An Efficient TP Model Transformation Algorithm for Robust Visual Servoing in the Presence of Uncertain Data, Acta Polytechnica Hungarica, vol. 17, no. 6, 2020.
- [83] V. Campos, M. F. Braga, L. Frezzatto: Analytical Upper Bound for the Error on the Discretization of Uncertain Linear Systems by using the Tensor Product Model Transformation, Acta Polytechnica Hungarica, vol. 17, no. 6, 2020.
- [84] A. Boonyaprapasorn, S. Kuntanapreeda, T. Sangpet, P. S. Ngiamsunthorn, E. Pengwang: Biological Pest Control Based on Tensor Product Transformation Method, Acta Polytechnica Hungarica, vol. 17, no. 6, 2020.
- [85] B. Lantos: Control Systems, Theory and Design I., Academic Press, Budapest, 2009.

- [86] B. Lantos: Control Systems, Theory and Design II., Academic Press, Budapest, 2016.
- [87] M. Kuczmann: Signals and systems, UNIVERSITAS-GYOR Kht., 2005.
- [88] Sz. Nagy, Z. Petres, P. Baranyi: TP tool - A MATLAB toolbox for TP model transformation, 8th International Symposium of Hungarian Researchers on Computational Intelligence and Informatics, CINTI (2007), Budapest, Hungary pp. 483–495.
- [89] K. Tanaka, M. SANO: On the Concepts of Regulator and Observer of Fuzzy Control, Proceedings of 1994 IEEE 3rd International Fuzzy Systems Conference, Jun. 1994.
- [90] K. Tanaka, H. Yoshida, H. Ohtake, H. O. Wang: A sum-of-squares approach to modeling and control of nonlinear dynamical systems with polynomial fuzzy systems, IEEE Transactions on Fuzzy systems, vol. 17, no. 4, pp.911–922, 2009.
- [91] K. Tanaka, H. Ohtake, Seo T., M. Tanaka, H. O. Wang: Polynomial fuzzy observer designs: A sum-of-squares approach, IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics), vol. 42, no. 5, pp. 1330–1342, 2012.
- [92] Y. L. Yu, X. Liu, K. Hirota X. Chen, H. H. C. Iu: A Nested Tensor Product Model Transformation, IEEE Transactions on Fuzzy Systems, vol. 27, no. 1, pp. 1–15, 2019.
- [93] P. Baranyi: Extension of the Multi-TP Model Transformation to Functions with Different Numbers of Variables, Hindawi, Complexity, Volume 2018, Article ID 8546976, 9 pages.
- [94] D. Tikk, P. Baranyi, R.J. Patton: APPROXIMATION PROPERTIES OF TP MODEL FORMS AND ITS CONSEQUENCES TO TPDC DESIGN FRAMEWORK, Asian Journal of Control, vol. 9, no. 3, pp. 221–231, 2008.
- [95] S. Nagy, Z. Petres, P. Baranyi, H. Hashimoto: Computational relaxed TP model transformation: restricting the computation to subspaces of the dynamic model, Asian Journal of Control, vol. 11, no. 5, pp. 461–475, 2009.
- [96] J. Kuti, P. Galambos, P. Baranyi: Minimal Volume Simplex (MVS) Polytopic Model Generation and Manipulation Methodology for TP Model Transformation, Asian Journal of Control, vol. 19, no. 1, pp. 289–301, 2017.
- [97] P. Várkonyi, D. Tikk, P. Korondi, P. Baranyi: A new algorithm for RNO-INO type tensor product model representation, Proceedings of the 9th IEEE International Conference on Intelligent Engineering Systems, pp. 263–266, 2005.
- [98] P. Baranyi, L. Szeidl, P. Várlaki: Numerical reconstruction of the HOSVD based canonical form of polytopic dynamic models, Proceedings of the 10th International Conference on Intelligent Engineering Systems, pp. 196–201, 2006.
- [99] P. Baranyi, Y. Yam: Fuzzy rule base reduction, Fuzzy IF-THEN Rules in Computational Intelligence: Theory and Applications, Kluwer, pp. 135-160, 2000.
- [100] P. Galambos, P. Baranyi: TP-tau Model Transformation: A Systematic Modelling Framework to Handle Internal Time Delays in Control Systems, Special Issue on TP model transformation-based control system design in Asian Journal of Control, vol. 17, no. 2, pp. 486–496, 2015.

- [101] V. C. de Silva Campos, L. M. S. Vianna, M. F. Braga: A Tensor Product Model Transformation Approach to the Discretization of Uncertain Linear Systems, *Acta Polytechnica Hungarica*, vol. 15, no. 3, 2018.
- [102] P. Baranyi, Z. Petres, P. Várkonyi, P. Korondi, Y. Yam: Determination of different polytopic models of the prototypical aeroelastic wing section by TP model transformation, *Journal of Advanced Computational Intelligence*, vol. 10, no. 4, pp. 486–493, 2006.
- [103] D. Tikk, P. Baranyi, R. Patton: Polytopic and TS models are nowhere dense in the approximation model space, *Proceedings of the 2002 IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics*, vol. 7, (Yasmine Hammamet, Tunisia), 2002.
- [104] D. Tikk, P. Baranyi, R. Patton, J. Tar: Approximation capability of TP model forms, *Australian Journal of Intelligent Information Processing Systems*, vol. 8, no. 3, pp. 155–163, 2004.
- [105] Z. Petres, P. Baranyi, H. Hashimoto: Approximation and complexity trade-off by TP model transformation in controller design: A case study of the TORA system, *Asian Journal of Control*, vol. 12, no. 5, pp. 575–585, 2010.
- [106] P. Baranyi, Z. Petres, P. Korondi, Y. Yam, H. Hashimoto: Complexity relaxation of the tensor product model transformation for higher dimensional problems, *Asian Journal of Control*, vol. 9, no. 2, pp. 195–200, 2007.
- [107] P. Galambos, J. Kuti, P. Baranyi, G. Szögi, I. J. Rudas: Tensor product based convex polytopic modeling of nonlinear insulin-glucose dynamics, *Systems, Man, and Cybernetics (SMC), 2015 IEEE International Conference on*, pp. 2597–2602, IEEE, 2015.
- [108] L. Kovacs, G. Eigner: Tensor Product Model Transformation-based Parallel Distributed Control of Tumor Growth, *Acta Polytechnica Hungarica*, vol. 15, no. 3, pp. 1–22, 2018.
- [109] A. M. F. Pereira, L. M. S. Vianna, N. A. Keles, V. C. de Silva Campos: Tensor Product Model Transformation Simplification of Takagi-Sugeno Control and Estimation Laws—An Application to a Thermoelectric Controlled Chamber, *Acta Polytechnica Hungarica*, vol. 15, no. 3, 2018.
- [110] J. Kuti, P. Galambos: Affine tensor product model transformation, *Complexity*, pp. 12, 2018.
- [111] H. Gong, H. Sun, B. Wang, Y. Yu, Z. Li, X. Liao, X. Liu: Tensor Product Model-Based Control for Space-craft with Fuel Slosh Dynamics, *Acta Polytechnica Hungarica*, vol. 15, no. 3, 2018.
- [112] H. Bouzaouache: Tensor Product-Based Model Transformation and Optimal Controller Design for High Order Nonlinear Singularly Perturbed Systems, *Asian Journal of Control*, 2019.
- [113] S. Kuntanapreeda: Tensor Product Model Transformation Based Control and Synchronization of a Class of Fractional-Order Chaotic Systems, *Asian Journal of Control*, vol. 17, no. 2, pp. 1–10, 2015.

- [114] V. C. S. Campos, F. O. Souza, L. A. B. Torres, R. M. Palhares: New stability conditions based on piecewise fuzzy Lyapunov functions and tensor product transformations, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 21, no. 4, pp. 784–760, 2013.
- [115] X. Liu, X. Xin, Z. Li, Z. Chen: Near Optimal Control Based on the Tensor-Product Technique, *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, vol. 64, no. 5, pp. 560–564, 2017.
- [116] X. Liu, Y. Yu, Z. Li, H. H. C. Lu: Polytopic H_∞ filter design and relaxation for nonlinear systems via tensor product technique, *Signal Processing*, Elsevier, vol. 127, pp. 191–205, 2016.
- [117] G. Zhao, H. Li, Z. Song: Tensor Product model transformation based decoupled terminal sliding mode control, *International Journal of Systems Science*, Taylor & Frances, vol. 47, no. 8, pp. 1791–1803, 2014.
- [118] G. Zhao, D. Wang, Z. Song: A novel tensor product model transformation-based adaptive variable universe of discourse controller, *Journal of the Franklin Institute*, Elsevier, vol. 353, no. 17, pp. 4471–4499, 2016.
- [119] G. Zhao, S. Huang, Y. Zhang, T. Zhang, Y. Zhang: Tensor product model transformation based fractional decoupled sliding-mode control for cart-pole system with time-varying sliding surfaces and Dahl friction model, *Proceedings of the 29th Chinese Control And Decision Conference (CCDC)*, 2017.
- [120] J. Cui, K. Zhang, T. Ma: An efficient algorithm for the tensor product model transformation, *International Journal of Control, Automation and Systems*, vol. 14, no. 5, pp. 1205–1212, 2016.
- [121] T. Jiang, D. Lin: Tensor Product Model-Based Gain Scheduling of a Missile Autopilot, *Transactions of Japan Society for Aeronautical and Sapce Science*, vol. 59, no. 3, pp. 142–149, 2016.
- [122] A. Hajiloo, W. F. Xie: The stochastic robust model predictive control of shimmy vibration in aircraft landing gears, *Asian Journal of Control*, vol. 17, no. 2, pp. 476–485, 2015.
- [123] K. Tanaka, M. Sugeno: Stability analysis and design of fuzzy control systems, *Fuzzy sets and systems*, Elsevier, vol. 45, no. 2, pp. 135–156, 1992.
- [124] R.-E. Precup, E. M. Petriu, M.-B. Radac, S. Preitl, L.-O. Fedorovici, C.-A. Dragos: Cascade Control System-Based Cost Effective Combination of Tensor Product Model Transformation and Fuzzy Control, *Asian Journal of Control*, vol. 17, no. 2, pp. 381–391, 2015.
- [125] TT Wang, WF Xie, GD Liu, YM Zhao: Quasi-Min-Max Model Predictive Control for Image-Based Visual Servoing with Tensor Product Model Transformation, *Asian Journal of Control*, vol. 17, no. 2, pp. 402–416, 2015.
- [126] P. Seiler, G. J. Balas, A. Packard: Linear parameter-varying control for the x-53 active aeroelastic wing, *Control of Linear Parameter Varying Systems with Applications*, Springer, pp. 483–512, 2012.

- [127] J. Kuti, P. Galambos, Á. Miklós: Output Feedback Control of a Dual-Excenter Vibration Actuator via qLPV Model and TP Model Transformation, *Asian Journal of Control*, vol. 17, no. 2, pp. 432–442, 2015.
- [128] J. Pan, L. Lu: TP Model Transformation Via Sequentially Truncated Higher-Order Singular Value Decomposition, *Asian Journal of Control*, vol. 17, no. 2, pp. 467–475, 2015.
- [129] J. Matuško, S. Ileš, F. Kolonić, V. Lešić: Control of 3D tower crane based on tensor product model transformation with neural friction compensation, *Asian Journal of Control*, vol. 17, no. 2, pp. 443–458, 2015.
- [130] Y. Huang, C. Sun, C. Qian: Linear parameter varying switching attitude tracking control for a near space hypersonic vehicle via multiple lyapunov functions, *Asian Journal of Control*, vol. 17, no. 2, pp. 523–534, 2015.
- [131] S. Campos, V. Costa, L. A. B. Tôrres, R. M. Palhares: Revisiting the TP model transformation: Interpolation and rule reduction, *Asian Journal of Control*, vol. 17, no. 2, pp. 392–401, 2015.
- [132] G. Zhao, K. Sun, H. Li: Tensor product model transformation based adaptive integral-sliding mode controller: Equivalent control method, *The Scientific World Journal*, Hindawi Publishing Corporation, 2013.
- [133] S. Chumalee, J. F. Whidborne: Gain-Scheduled H_∞ Control for Tensor Product Type Polytopic Plants, *Asian Journal of Control*, vol. 17, no. 2, pp. 417–431, 2015.
- [134] W. Jiang, H. Wang, J. Lu, Z. Xie: HOSVD-based LPV modeling and mixed robust H_2/H_∞ control design for air-breathing hypersonic vehicle, *Journal of Systems Engineering and Electronics*, vol. 27, no. 1, pp. 183–191, 2016.
- [135] M-B. Radac, R-E. Precup: Data-based two-degree-of-freedom iterative control approach to constrained non-linear systems, *IET Control Theory & Applications*, vol. 9, no. 7, pp. 1000–1010, 2015.
- [136] B: Takarics, Y. Yam: Robust grid point-based control design for LPV systems via unified TP transformation, *Proceedings of the IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics (SMC)*, pp. 2626–2631, 2015 .
- [137] Z. He, M. Yin, Y-P. Lu: Tensor product model-based control of morphing aircraft in transition process, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering*, vol. 230, no. 2, pp. 378–391, 2016.
- [138] M-Y. Ma, C-Y. Dong, Q. Wang, M. Ni: Robust Stability Analysis for Systems with Time-Varying Delays: A Delay Function Approach, *Asian Journal of Control*, vol. 18, no. 5, pp. 1923–1933, 2016.
- [139] J. Chen, R. Li, C. Cao: Convex polytopic modeling for flexible joints industrial robot using TP-model transformation, *Proceedings of the IEEE International Conference on Information and Automation*, pp. 1046–1050, 2014.

- [140] R-E. Precup, C-A. Dragos, S. Preitl, M-B. Radac, E. M. Petriu: Novel tensor product models for automatic transmission system control, *IEEE Systems Journal*, vol. 6, no. 3, pp. 488–498, 2012.
- [141] C. Ariño, A. Sala: Relaxed LMI conditions for closed-loop fuzzy systems with tensor-product structure, *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, vol. 20, no. 8, pp. 1036–1046, 2007.
- [142] F. Yang, Z. Chen, X. Liu, B. Liu: A New Constant Gain Kalman Filter Based on TP Model Transformation, *Proceedings of the Chinese Intelligent Automation Conference*, pp. 305–312, 2013.
- [143] Š. Ileš, J. Matuško, F. Kolonić: Tensor product transformation based speed control of permanent magnet synchronous motor drives, *Proceedings of the 17th International Conference on Electrical Drives and Power Electronics (EDPE) (5th Joint Slovak-Croatian Conference)*, 2011.
- [144] R. E. Precup, C. A. Dragoş, S. Preitl, M. B. Rădac, E. M. G. Petriu: Tensor product models for automotive applications, *Proceedings of the 14th International Conference on System Theory and Control (ICSTC)*, 2010.
- [145] P. Korondi: Sector sliding mode design based on tensor product model transformation, *Proceedings of the 11th IEEE International Conference on Intelligent Engineering Systems (INES)*, pp. 253–258, 2007.
- [146] Y. Kunii, B. Solvang, G. Sziebig, P. Korondi: Tensor product transformation based friction model, *Proceedings of the 11th IEEE International Conference on Intelligent Engineering Systems (INES)*, pp. 259–264, 2007.
- [147] A. Rövid, L. Szeidl, P. Várlaki: On tensor-product model based representation of neural networks, *Proceedings of the 15th IEEE International Conference on Intelligent Engineering Systems (INES)*, pp. 69–72, 2011.
- [148] V. C. S. Campos, L. M. S. Vianna, M. F. Braga: A Tensor Product Model Transformation Approach to the Discretization of Uncertain Linear Systems, *Acta Polytechnica Hungarica*, vol. 15, no. 3, pp. 31–43, 2018.
- [149] Y. Kan, Z. He, Zhen, J. Zhao: Tensor Product Model-based Control Design with Relaxed Stability Conditions for Perching Maneuvers, *Acta Polytechnica Hungarica*, vol. 15, no. 3, pp. 45–61, 2018.
- [150] H. Gong, H. Sun, B. Wang, Y. Yu, Z. Li, X. Liao, X. Liu: Tensor Product Model-based Control for Spacecraft with Fuel Slosh Dynamics, *Acta Polytechnica Hungarica*, vol. 15, no. 3, pp. 63–80, 2018.
- [151] B. Takarics, A. Szollosi, B. Vanek: Tensor product type polytopic LPV modeling of aeroelastic aircraft, *IEEE Aerospace Conference*, pp. 1–10, 2018.
- [152] S-K. Hong, R. Langari: An LMI-based H_{∞} fuzzy control system design with TS framework, *Information Sciences*, vol. 123, no. 3–4, pp. 163–179, 2000.

- [153] J. Park, J. Kim, D. Park: LMI-based design of stabilizing fuzzy controllers for nonlinear systems described by Takagi–Sugeno fuzzy model, *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 122, no. 1, pp. 73–82, 2001.
- [154] M. Marcus, B. N. Moys: Transformations on tensor product spaces, *Pacific Journal of Mathematics*, vol. 9, no. 4, pp. 1215–1221, 1959.
- [155] B. Takarics, B. Vanek, A. Kotikalpudi, P. Seiler: Flight control oriented bottom-up nonlinear modeling of aeroelastic vehicles, 2018 IEEE aerospace conference, pp. 1–10, 2018.
- [156] B. Takarics: Parallel distributed compensation based sector sliding mode control of Takagi-Sugeno type polytopic models, 2012 IEEE 10th International Symposium on Applied Machine Intelligence and Informatics (SAMi), pp. 501–506, 2012.
- [157] Z. Petres, P. Baranyi, P. Korondi, H. Hashimoto: Trajectory tracking by TP model transformation: Case study of a benchmark problem, *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 54, no. 3, pp. 1654–1663, 2007.
- [158] B. Vanek, G. J. Balas, R. EA Arndt: Linear, parameter-varying control of a supercavitating vehicle, *Control Engineering Practice*, vol. 18, no. 9, pp. 1003–1012, 2010.
- [159] Z. Németh, M. Kuczmann: Tensor product transformation-based modeling of an induction machine, *Asian Journal of Control*, pp. 1–10, 2020.
- [160] Z. Németh, M. Kuczmann: Tensor Product Transformation Based Robust Control of Induction Machine, 2020 2nd IEEE International Conference on Griding and Polytope Based Modelling and Control (GPMC), pp. 39–44, 2020.
- [161] K. W. Wong, D. Tikk, T. D. Gedeon, L. T. Kóczy: Fuzzy rule interpolation for multidimensional input spaces with applications: A case study, *IEEE transactions on fuzzy systems*, vol. 13, no. 6, pp. 809–819, 2005.
- [162] D. Tikk, P. Baranyi: Comprehensive analysis of a new fuzzy rule interpolation method, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 8, no. 3, pp. 281–296, 2000.
- [163] Zs. Cs. Johanyák, D. Tikk, Sz. Kovács, K. W. Wong: Fuzzy rule interpolation Matlab toolbox-FRI toolbox, 2006 IEEE International Conference on Fuzzy Systems, pp. 351–357, 2006.
- [164] Z. Németh, M. Kuczmann: Linear-Matrix-Inequality-Based Controller and Observer Design for Induction Machine, *Electronics*, vol. 11, no. 23, pp. 3894, 2022.
- [165] M. Kuczmann, T. Budai: Linear state space modeling and control teaching in MaxWhere virtual laboratory, *Acta Polytechnica Hungarica*, vol. 16, no. 6, pp. 27–39, 2019.
- [166] M. Wang, Y. Song: Tensor Decompositions via Two-Mode Higher-Order SVD (HOSVD), *Proceedings of the 20th International Conference on Artificial Intelligence and Statistics*, pp. 614–622, 2017.

- [167] H. O. Wang, K. Tanaka, M. F. Griffin: An approach to fuzzy control of nonlinear systems: Stability and design issues, *IEEE transactions on fuzzy systems*, vol. 4, no. 1, pp. 14–23, 1996.
- [168] K. Tanaka, T. Ikeda, H. O. Wang: Robust stabilization of a class of uncertain nonlinear systems via fuzzy control: quadratic stabilizability, $H/\sup/spl infin//$ control theory, and linear matrix inequalities, *IEEE transactions on fuzzy systems*, vol. 4, no. 1, pp. 1–13, 1996.
- [169] K. Tanaka, T. Hori, H. O. Wang: A multiple Lyapunov function approach to stabilization of fuzzy control systems, *IEEE transactions on fuzzy systems*, vol. 11, no. 4, pp. 582–589, 2003.
- [170] H. O. Wang, K. Tanaka, M. Griffin: Parallel distributed compensation of nonlinear systems by Takagi-Sugeno fuzzy model, *Proceedings of 1995 IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, vol. 2, pp. 531–538, 1995.
- [171] P. Galambos: TP Model Transformation based Control Design for Time-delay Systems: Application in Telemanipulation, PhD thesis, Géza Pattantyús-Ábrahám Doctoral School of Mechanical Engineering, Budapest, Hungary, December 2013.
- [172] N. Kamarkar: A new polynomial-time algorithm for linear programming, *Combinatorica*, vol. 4, pp. 373–395, 1984.
- [173] J. Bokor, G. Balas: Linear matrix inequalities in systems and control theory, *Perprints of 16th IFAC Word Congress*, p. Keynote lecture, 2005.
- [174] P. Baranyi: Convex hull generation methods for polytopic representations of lpv models, *7th International Symposium on Applied Machine Intelligence and Informatics*, pp. 69–74, 2009.
- [175] P. Rosa, G. J. Balas, C. Silvestre, M. Athans: A synthesis method of LTI MIMO robust controllers for uncertain LPV plants, *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 59, no. 8, pp. 2234–2240, 2014.
- [176] Y. Bolea, V. Puig, J. Blesa: Gain-scheduled Smith predictor PID-based LPV controller for open-flow canal control, *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 22, no. 2, pp. 468–477, 2014.
- [177] J. Castro: Fuzzy logic controllers are universal approximators, *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, vol. 25, no. 4, pp. 629–635, 1995.
- [178] G. Eigner, I. J. Rudas, L. Kovács: Investigation of the tp-based modeling possibility of a nonlinear icu diabetes model, *Systems, Man, and Cybernetics (SMC)*, 2016 IEEE International Conference on, pp. 003405–003410, IEEE, 2016.
- [179] J. Klespitz, I. J. Rudas, L. Kovács: Lmi-based feedback regulator design via tp transformation for fluid volume control in blood purification therapies, *Systems, Man, and Cybernetics (SMC)*, 2015 IEEE International Conference on, pp. 2615–2619, IEEE, 2015.

- [180] G. Eigner, J. Tar, I. J. Rudas, L. Kovács: Lpv-based quality interpretations on modeling and control of diabetes, *Acta Polytechnica Hungarica*, vol. 13, no. 1, pp. 171–190, 2016.
- [181] L. Kovács, G. Eigner: Convex polytopic modeling of diabetes mellitus: A tensor product based approach, *Systems, Man, and Cybernetics (SMC)*, 2016 IEEE International Conference on, pp. 003393–003398, IEEE, 2016.
- [182] P. Gahinet, P. Apkarian, M. Chilali: Affine parameter-dependent Lyapunov functions for real parametric uncertainty, *Proceedings of the 33rd IEEE Conference on Decision and Control*, 1994, vol. 3, (Orlando, Florida, USA), pp. 2026–2031, 1994.
- [183] B. Barmish: Stabilization of uncertain systems via linear control, *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 28, no. 8, pp. 848–850, 1983.
- [184] I. Masubuchi, A. Ohara, N. Suda: LMI-based controller synthesis: A unified formulation and solution, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 8, no. 8, pp. 669–686, 1998.
- [185] P. Gahinet, A. Nemirovski, A. Laub, M. Chilali: *LMI control toolbox user’s guide*, The Math. Works Inc., 1995.
- [186] Z. Prime, B. Cazzolato, C. Doolan, T. Strganac: Linear-parameter-varying control of an improved three-degree-of-freedom aeroelastic model, *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, vol. 33, no. 2, pp. 615–619, 2010.
- [187] A. Wéber, M. Kuczmann: TP Transformation Based Controller and Observer Design of the Inverted Pendulum, *PRZEGLAD ELEKTROTECHNICZNY*, pp. 34–39, R. 98 NR 10/2022.
- [188] A. Wéber, M. Kuczmann: Study of the TP Transformation via the Inverted Pendulum Example, *ACTA TECHNICA JAURINENSIS* 14:1, 23 p., 2021.
- [189] A. Wéber, M. Kuczmann: TP Transformation of the Inverted Pendulum, 2020 2nd IEEE International Conference on Gridding and Polytope Based Modelling and Control (GPMC), pp. 13–18. , 6 p, 2020.
- [190] A. Wéber, M. Kuczmann: TP Transformation Based Observer and Controller Design of 2DoF Aeroelastic Wing Section Model, 2022 IEEE 1st International Conference on Internet of Digital Reality (IoD), pp. 000017–000022, 2022.
- [191] A. Wéber: Nemlineáris rendszerek tenzorszorzat alapú megfigyelőjének tervezése, Új Nemzeti Kiválóság Program 2021/2022, Széchenyi István Egyetem, pp. 249–258, 2022.
- [192] A. Wéber, M. Kuczmann: State Feedback Controller Design of an Active Suspension System for Vehicles Using Pole Placement Technique, *ACTA TECHNICA JAURINENSIS*, 12:3, pp. 178–190, 2019.
- [193] A. Wéber, M. Kuczmann: LMI Feasibility Analysis of 2DoF NATA model, *Pollack Periodica*, 2023.

- [194] A. Wéber, M. Kuczmann, P. Baranyi: Extending the Input and Transformation Space of Different TP Models: an LMI Based Feasibility Analysis, Acta Polytechnica Hungarica, 2023.
- [195] A. Wéber, M. Kuczmann: Extending the TPTool MATLAB toolbox with LMI based observer and disturbance rejection design, Results in Control and Optimization, 2023.